Інститут математики НАН України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана

Чернівці, 16–19 вересня 2020 року

Чернівці, 2020

УДК 51-7(08)
С 916

Рекомендовано до друку Вченою радою
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича
(протокол №1 від 26 серпня 2020 року)

Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана, 16—19 вересня 2020 р. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2020. – 211 с.

Збірник матеріалів міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування" включає наукові роботи вчених України, країн Європи, Азії та Америки, які проводять дослідження у галузі диференціальних рівнянь та математичного моделювання.

Для наукових працівників, аспірантів

.
.

© Факультет математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 2020

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

СПІВГОЛОВИ:

Анатолій Самойленко – академік НАН України, директор Інституту математики НАН України

Роман Петришин – професор, ректор Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

ЧЛЕНИ ПРОГРАМНОГО КОМІТЕТУ:

академік Роман Кушнір (Україна), академік Микола Перестюк (Україна), академік Аркадій Чикрій (Україна), член-кор. Олександр Бойчук (Україна), член-кор. Анатолій Кочубей (Україна), член-кор. Ігор Скрипник (Україна), член-кор. Василь Слюсарчук (Україна), професор Олександра Антонюк (Україна), професор Іван Бейко (Україна), професор Матанья Бен-Артзі (Ізраїль), професор Ярослав Бігун (Україна), професор Микола Бокало (Україна), професор Василь Городецький (Україна), професор Ростислав Григорчук (США), професор Дулат Джумабаєв (Казахстан), професор Олександр Домошніцький (Ізраїль), професор Юлій Ейдельман (Ізраїль), професор Вячеслав Євтухов (Україна), професор Степан Івасишен (Україна), професор Петро Каленюк (Україна), професор Шошана Камін (Ізраїль), професор Думітру Козьма (Молдова), професор Юрій Кондратьєв (Німеччина), професор Іван Конет (Україна), професор Ігор Король (Україна), професор Петро Кучмент (США), професор Ольга Мартинюк (Україна), професор Михайло Матійчук (Україна), професор Костіка Морошану (Румунія), професор Володимир Пелих (Україна), професор Михайло Петрик (Україна), професор Єхуда Пінчовер (Ізраїль), професор Микола Працьовитий (Україна), професор Іван Пукальський (Україна), професор Міклош Ронто (Угорщина), професор Валерій Самойленко (Україна), професор Олександр Станжицький (Україна), професор Юрій Теплінський (Україна), професор Віктор Ткаченко (Україна), професор Уршула Фориш (Польща), професор Ігор Черевко (Україна), професор Олександр Шубе (Молдова),

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

ГОЛОВА:

Ольга Мартинюк – професор, декан факультету математики та інформатики

ЗАСТУПНИКИ ГОЛОВИ:

Ярослав Бігун – професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

Ярослав Дрінь – професор, завідувач кафедри математичних проблем управління і кібернетики

Іван Пукальський – професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь

Ігор Черевко – професор, завідувач кафедри математичного моделювання

ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР:

Галина Пасічник – доцент кафедри математичного моделювання

ЧЛЕНИ ОРГАНІЗАЦІЙНОГО КОМІТЕТУ:

Степан Блажевський, Роман Дрінь, Віталій Дронь, Галина Івасюк, Іван Клевчук, Олег Ленюк, Ірина Лусте, Володимир Лучко, Лілія Мельничук, Галина Перун, Лариса Піддубна, Микола Філіпчук, Тоня Фратавчан

PROGRAM COMMITTEE

CO-CHAIR:

Anatoly Samoilenko – academician of NAS of Ukraine, director of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine

Roman Petryshyn – professor, rector of Yuriy Fedykovich Chernivtsi National University

MEMBERS OF THE PROGRAMME COMMITTEE:

academician Arkadii Chikrii (Ukraine), academician Roman Kushnir (Ukraine), academician Mykola Perestyuk (Ukraine), corresponding Member Oleksandr Boichuk (Ukraine), corresponding Member Anatoly Kochubei (Ukraine), corresponding Member Ihor Skrypnyk (Ukraine), corresponding Member Vasyl Slyusarchuk (Ukraine), professor Alexandra Antoniouk (Ukraine), professor Ivan Beyko (Ukraine), professor Matania Ben-Artzi (Israel), professor Yaroslav Bihun (Ukraine), professor Mykola Bokalo (Ukraine), professor Ihor Cherevko (Ukraine), professor Dumitru Cozma (Moldova), professor Alexander Domoshnitsky (Israel), professor Dulat Dzhumabaiev (Kazakhstan), professor Yuli Eidelman (Israel), professor Vyacheslav Evtukhov (Ukraine), professor Urszula Forys (Poland), professor Vasyl Gorodetskyi (Ukraine), professor Rostislav Grigorchuk (USA), professor Stepan Ivasyshen (Ukraine), professor Petro Kalenyuk (Ukraine), professor Shoshana Kamin (Israel), professor Yuri Kondratiev (Germany), professor Ivan Konet (Ukraine), professor Ihor Korol' (Ukraine), professor Peter Kuchment (USA), professor Olha Martynyuk (Ukraine), professor Mykhaylo Matiychuk (Ukraine), professor Costica Morosanu (Romania), professor Volodymyr Pelykh (Ukraine), professor Mykhaylo Petryk (Ukraine), professor Yehuda Pinchover (Israel), professor Mykola Pratsiovytyi (Ukraine), professor Ivan Pukalskyi (Ukraine), professor Miklos Ronto (Hungary), professor Valeriy Samoilenko (Ukraine), professor Olexandr Stanzhytskyi (Ukraine), professor Yuriy Teplinsky (Ukraine), professor Viktor Tkachenko (Ukraine), professor Alexandru Suba (Moldova)

ORGANIZING COMMITTEE

CHAIRMAN:

Olha Martynyuk – professor, dean of the Faculty of Mathematics and Informatics

DEPUTY CHAIRMAN:

Yaroslav Bihun – professor, head of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies

Yaroslav Drin' – professor, head of the Department of Mathematical Problems in Control and Cybernetics

Ivan Pukalskyi – professor, head of the Department of Differential Equations

Ihor Cherevko – professor, head of the Department of Mathematical Modeling

SCIENTIFIC SECRETARY:

Galyna Pasichnyk – associate professor of the Department of Mathematical Modeling

ORGANIZING COMMITTEE MEMBERS:

Stepan Blazhevskyi, Roman Drin', Vitaliy Dron', Mykola Filipchuk, Tonia Fratavchan, Halyna Ivasyuk, Ivan Klevchuk, Oleg Leniuk, Volodymyr Luchko, Iryna Luste, Lilia Melnychuk, Galina Perun, Larysa Piddubna

Самуїл Давидович Ейдельман – учений, педагог, особистість

Самуїл Давидович (СД) – визначний український математик, талановитий педагог, доктор фізико-математичних наук, професор, випускник Чернівецького університету 1948 року, засновник відомої наукової школи з теорії параболічних рівнянь. Він пішов із земного життя 8 червня 2005 року.

СД залишив багату спадщину. Вона включає наукові ідеї, методи, теореми, різноманітні педагогічні прийоми, зразки працелюбності й працездатності, надзвичайно відповідального ставлення до своїх обов'язків, зразки порядності, зразки роботи й спілкування з учнями, співробітниками, зразки того, як треба "вчитися на математика" (за його висловом). А він "вчився на математика" щоденно впродовж усього свого життя.

С.Д. Ейдельман народився 1 вересня 1920 року (за офіційними документами 3 січ-ня 1921 року) у м. Хмельницькому (колишньому Проскурові). У ранньому дитинстві залишився без батька, його виховувала мати. Після закінчення середньої школи в Проскурові з 1938 до 1941 року навчався на фізико-математичному факультеті Київського університету. Із серпня 1941 року до жовтня 1946 року служив у Радянській армії, брав участь у бойових діях з Німеччиною і Японією. Упродовж 1946–1963 рр. навчався і потім працював, пройшовши всі сходинки від лаборанта до професора і завідувача кафедри диференціальних рівнянь, на фізико-математичному факультеті Чернівецького університету. У 1963–1968 рр. завідував кафедрою вищої математики Воронезького політехнічного інституту й за сумісництвом працював професором кафедри рівнянь із частинними похідними та теорії ймовірностей Воронезького університету. Протягом 1968–1993 рр. він працював професором кафедри вищої математики Київського вищого інженерного радіотехнічного училища, а з 1993 р. до кінця життя – професором і завідувачем кафедри факультету комп'ютерних наук Міжнародного Соломонового університету та з 1997 р. за сумісництвом – провідним науковим співробітником відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України.

У 1953 р. СД у Львівському університеті захистив кандидатську дисертацію "Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения" (офіційні опоненти О.С. Кованько і Я.Б. Лопатинський), а в 1959 р. у Московському університеті – докторську дисертацію "Исследование по теории параболических систем" (офіційні опоненти (С.Г. Крейн, Є.М. Ландіс і Г.Є. Шилов). У відгуку С.Г. Крейна, зокрема, зазначено таке: "Наличие столь детального изучения фундаментальных матриц решений параболических систем позволяет предвидеть получение значительного числа новых результатов на базе уже известной техники". Це передбачення видатного математика повністю справдилося!

Першим учителем СД був М.І. Симонов, який прибув у Чернівці з Москви і в 1946 р. став першим завідувачем кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького університету. Він запропонував СД тему першої наукової роботи, звернув його увагу на ключові праці І.Г. Петровського. Вирішальну роль у науковій долі СД відіграли І.Г. Петровський, Я.Б. Лопатинський і Г.Є. Шилов. Їхні фундаментальні праці та особисте спілкування з ними були для СД джерелом роздумів над різними проблемами теорії рівнянь із частинними похідними.

Основні наукові праці СД присвячені теорії рівнянь із частинними похідними, особливо теорії параболічних систем, в якій він одержав ряд істотних результатів, завдяки яким став широко відомим серед фахівців.

Так, для загальних параболічних за І.Г. Петровським систем СД розв'язав поставлену Іваном Георгійовичем проблему єдиності розв'язків задачі Коші в класах швидкозростаючих функцій, побудував і дослідив фундаментальні матриці розв'язків, установив зв'язок між фундаментальними матрицями розв'язків параболічних та еліптичних систем, дослідив класи коректності задачі Коші, ввів поняття дисипації систем з необмеженими коефіцієнтами, одержав точні оцінки ядер Пуассона модельних крайових задач. Він означив і почав досліджувати новий клас систем – клас $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем, названий класом параболічних за Ейдельманом систем.

Спільно з учнями побудував і дослідив однорідну матрицю Гріна параболічних крайових задач, вивчив питання стабілізації розв'язків і коректної розв'язності в просторах Діні задачі Коші та крайових задач; увів нові класи вироджених параболічних рівнянь типу рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова, а також класи параболічних псевдодиференціальних рівнянь і систем рівнянь з негладкими символами і для цих класів рівнянь дослідив розв'язність, стабілізацію розв'язків задачі Коші; вивчив слабкі фундаментальні розв'язки задачі Коші для рівнянь другого порядку з вимірними коефіцієнтами.

Ряд важливих досліджень СД провів спільно з В.О. Кондратьєвим у теорії додатних розв'язків лінійних і квазілінійних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними довільного порядку й типу. Доведено інтегровність таких розв'язків в околі гладкого нехарактеристичного многовиду. З цього фундаментального факту випливає багато важливих властивостей додатних розв'язків. Найповніші результати одержано для еліптичних і параболічних систем різної структури, еволюційних квазіеліптичних систем.

У циклі спільних із А.Н. Кочубеєм праць розглянуто задачу Коші для неоднорідного рівняння фрактальної дифузії зі змінними коефіцієнтами. Для такої задачі побудовано й досліджено матрицю Гріна і з її допомогою встановлено розв'язність цієї задачі.

В останні роки життя СД провів спільні з Ш. Камін і Ф.О. Порпером дослідження, присвячені з'ясуванню того, як впливає на класи єдиності та коректності задачі Коші для вироджених на нескінченності (при $|x| \to \infty$) параболічних рівнянь другого порядку поведінка коефіцієнта при похідній за часом при великих значеннях просторових змінних. Досліджувались також умови стабілізації обмежених розв'язків задачі Коші для таких рівнянь.

Наукові інтереси СД не обмежувалися лише рівняннями з частинними похідними. Добре розуміючи те, що найцікавіші та найважливіші для практики результати можна отримати на стиках різних галузей науки, він успішно займався питаннями, безпосередньо пов'язаними з математичними моделями реальних процесів. Він одержав цікаві для застосувань результати в теорії функціонування марковських стохастичних автоматів у випадкових середовищах, теорії оптимальних дискретних кодів, задачах нечіткої оптимізації. Великий цикл праць, виконаних спільно з Р.М. Розориновим, присвячений практично реалізовним алгоритмам обчислення усереднених енергетичних спектрів, важливих для цифрового магнітного запису імпульсних випадкових процесів, які керуються скінченними ланцюгами Маркова. Цілий ряд важливих результатів одержано в співавторстві з А.О. Чикрієм та О.Г. Руренком для задач теорії еволюційних ігор зближення. Зокрема, для інтегральних та інтегродиферениіальних ігор знайдено умови закінчення гри за деякий гарантований час і запропоновано алторитм знаходження гарантованого часу закінчення гри; розвинуто нові аналітичні методи вивчення ігор, які грунтуються на систематичному використанні узагальнених матричних функцій Міттаг-Леффлера; введено новий широкий клас ігор зближення з вольтеррівською еволюцією, підкласами якого є інтегральні та фрактальні ігри зближення. Разом з В.О. Яворським і В.Ф. Задорожним СД досліджував модель Фоккера–Планка еволюції швидких частинок у тороїдальних магнітних полях.

СД був сильним аналітиком. Саме застосуванням тонких аналітичних методів було одержано ним і його учнями найточніші результати. Ось що сказав з цього приводу видатний московським математик В.О. Кондратьєв [2, с. 67]: "Его оценки решений уравнений и систем широко используются в работах настоящего времени, причем не видно, как их можно получить иным путем, чем СД. На всех математиков производило впечатление, что он пользовался только классическими методами, не применяя теорию обобщенных функций, которая тогда была очень популярной, и считалось, что без нее нельзя сделать ничего серьезного."

Наукова спадщина СД складається із 305 публікацій, серед них 5 монографій, більше 10 статей монографічного характеру, 4 авторські свідоцтва на винаходи.

Основною діяльністю СД протягом усього життя було викладання математики у вищій школі. Він сам казав, що він "швидше педагог, аніж учений". Практично кожного року він читав нові нормативні та спеціальні курси, намагаючись донести до слухачів своє бачення різних розділів теоретичної і прикладної математики. СД був блискучим лектором. Усі його лекції відзначались оригінальністю, чіткістю, дотепністю, вдалим підбором відповідних прикладів, повним розкриттям суті методів, які використовувались. Він завжди дуже ретельно готувався до кожного заняття і, взагалі, до будь-якого свого публічного виступу. Постійно турбувався методичним забезпеченням самостійної роботи студентів. Ним разом зі співробітниками підготовлено та опубліковано 17 навчальних посібників для студентів.

Наведемо деякі висловлювання студентів і співробітників СД.

"СД намагався вчити студентів неформальної математики, тобто вчити так, щоб вони бачили, де ці математичні результати можуть бути застосованими, і щоб уміли їх застосовувати. Доброзичливо зацікавлене ставлення СД до студентської аудиторії, влучний жарт часто дозволяли зняти напругу чи поставити на місце хамуватого студента. І взагалі спокійна, іронічно-жартівлива реакція СД неодноразово допомагала розрядити і складнішу ситуацію ..." (М.Я. Агре).

"СД был строгим преподавателем, но его требовательность сочеталась с умением так подойти к своим подопечным, что любой, даже не очень способный, его ученик начинал упорно и целеустремленно трудиться" (А.В. Дунаєв).

"Он нас учил не только математике. Он нас учил думать. Учил раскладывать по полочкам" (Д.В. Ершов).

"Его блестящие лекции, доброжелательная требовательность и любовь к студентам снискали ему преданную любовь студентов и коллег (А.А. Калюжный).

Учнями СД вважають себе чимало математиків. Під його офіційним науковим керівництвом виконано 20 кандидатських дисертацій. П'ятеро його учнів захистили докторські дисертації. Неофіційним науковим консультантом СД був і ще в 6 дисертантів.

СД підтримував постійні наукові зв'язки з інститутами математики академій наук України, Молдови і Казахстану, Московським, Чернівецьким та Алма-Атинським університетами, Київським і Воронезьким політехнічними інститутами. Особливо тісним був зв'язок з Інститутом математики НАН України. СД був постійним учасником і співкерівником наукових семінарів, працював, як уже зазначалося, провідним науковим співробітником у відділі, очолюваному І.В. Скрипником.

СД одержував на конкурсних засадах гранти Американського математичного товариства, Державного комітету України з науки і техніки та Соросівського професора. За оригінальні наукові розробки та істотний вклад у розвиток математики на Буковині СД було присуджено премію імені Ганса Гана в 1994 р. На превеликий жаль, він так і не став ні академіком, ні членом-кореснондентом, не був удостоєний жодної високої державної нагороди в галузі науки, хоча,безперечно, на це заслуговував. А коли мова йшла про висунення його в члени НАН України, він жартома відповідав: "Я почуваю себе академіком лише за своїм робочим столом". СД мав лише високі бойові нагороди: 5 орденів і 15 медалей. Дуже прикро, що рідний університет не спромігся удостоїти видатного свого випускника, який так прославив університетську математику, званням Почесного доктора Чернівецького університету.

Усе своє творче життя СД присвятив математиці, теоретичній та прикладній, у єдності яких бачив особливу силу й красу. Його постійною пристрастю і природною потребою були щоденні заняття науковою роботою. Але не тільки математика цікавила СД. Він любив художню літературу, цікавився політикою, спортом (добре грав у шахи і волейбол). Вдачу мав веселу, був дотепним, любив життя в усіх його різноманітних проявах, любив своїх рідних і близьких, а також учнів, яких учив, хвалив і прощав їм. Його кредо в роботі з учнями і співробітниками – вимоглива підтримка та вдячність.

Наведемо деякі висловлювання самого СД, його крилаті фрази, які цитувались і цитуються багатьма людьми.

- Меня учили многие, и добрые и строгие,
  Меня учили многие, а выучили строгие.

- Значимость человека равна дроби: в числителе стоит то, что человек на самом деле собой представляет, а в знаменателе – что человек о себе думает.

- Быть настоящим ученым – это умение в разных с виду задачах увидеть нечто общее.

- Занятия наукой – это все равно как езда в скором поезде. Если сойти на остановке и какое-то время ничего не делать, так тот поезд уже не догнать, он уже ушел. Поэтому заниматься надо систематически.
- Математика прекрасна, как женщина, только нужно найти к ней подход. И только нашедшие поймут ее красоту и больше никогда не будут в силах оставить ее, постигая бесконечные загадки этой удивительной женщины.
- Весь ушел в науку, снаружи торчала одна голова.
- У тебя есть база для дальнейшего роста (молодим людям, які демонструють невеликі знання).
- Не нужно бороться за чистоту, нужно просто убирать.

Івасишен Степан Дмитрович

Matania Ben-Artzi

Splines, biharmonic operator and approximate eigenvalues

Institute of Mathematics, The Hebrew University, Jerusalem 91904, Israel
E-mail: mbartzi@math.huji.ac.il

The biharmonic operator plays a central role in a wide array of physical models, such as elasticity theory and the streamfunction formulation of the Navier-Stokes equations. Its spectral theory has been extensively studied. In particular the one-dimensional case (over an interval) constitutes the basic model of a high order Sturm-Liouville problem. The need for corresponding numerical simulations has led to numerous works. The present paper relies on a discrete biharmonic calculus. The primary object of this calculus is a high-order compact discrete biharmonic operator (DBO). The DBO is constructed in terms of the discrete Hermitian derivative. However, the underlying reason for its accuracy remained unclear. This paper is a contribution in this direction, expounding the strong connection between cubic spline functions (on an interval) and the DBO. The first observation is that the (scaled) fourth-order distributional derivative of the cubic spline is identical to the action of the DBO on grid functions. It is shown that the kernel of the inverse of the discrete operator is (up to scaling) equal to the grid evaluation of the kernel of $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^4\right]^{-1}$, and explicit expressions are presented for both kernels. As an important application, the relation between the (infinite) set of eigenvalues of the fourth-order Sturm-Liouville problem and the finite set of eigenvalues of the discrete biharmonic operator is studied. The discrete eigenvalues are proved to converge (at an "optimal" $O(h^4)$ rate) to the continuous ones. Another consequence is the validity of a *comparison principle.* It is well known that there is no maximum principle for the fourth-order equation. However, a positivity result is derived, both for the continuous and the discrete biharmonic equation, showing that in both cases the kernels are order preserving.

Based on joint work with GUY KATRIEL.

Mykola Bokalo

Optimal control in problems without initial conditions for weakly nonlinear variational inequalities

Ivan Franko National University, Lviv, Ukraine
E-mail: mm.bokalo@gmail.com

Set $S := (-\infty, 0]$. Let V and H be separable Hilbert spaces with the scalar products $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)$ and norms $\|\cdot\|$, $|\cdot|$, respectively. Suppose that $V \subset H$ with continuous, dense and compact injection. Let V' and H' be dual spaces to V and H, respectively. We suppose (after appropriate identification of functionals), that the space H' is a subspace of V'. Identifying (by the Riesz–Frechet representation theorem) spaces H and H', we obtain continuous and dense injections $V \subset H \subset V'$. Note, that in this case $\langle g, v\rangle_V = (g, v)$ for every $v \in V, g \in H$, where $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ is the scalar product for the duality V', V. Therefore, further we use the notation $(\cdot,\cdot)$ instead of $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$.

We introduce some spaces of functions and distributions. Let X be an arbitrary Hilbert space with the scalar product $(\cdot,\cdot)_X$ and the norm $\|\cdot\|_X$. Under $C(S;X)$ we mean the linear space of continuous functions defined on S with values in X. Denote by $L^2_{\rm loc}(S;X)$ the linear space of measurable functions defined on S with values in X, whose restrictions to any segment $[t_1,t_2] \subset S$ belong to the space $L^2(t_1,t_2;X)$. Let $\nu \in \mathbb{R}$, and $L^2_\nu(S;X) := \Big\{ f \in L^2_{\rm loc}(S;X) \;\Big|\; \int_S e^{-2\nu t}\|f(t)\|^2_X dt < \infty \Big\}$, $L^\infty_\nu(S;X) :=$ $\{f \in L^\infty(S;X) \mid \operatorname*{ess\,sup}_{t\in S} \big[e^{-\nu t}\|f(t)\|_X\big] < \infty\}$. Denote $H^1_{\rm loc}(S;H) :=$ $\{z \in L^2_{\rm loc}(S;H) \,\big|\, z' \in L^2_{\rm loc}(S;H)\}$, $W^1_{2,{\rm loc}}(S;V) := \{z \in L^2_{\rm loc}(S;V) \,\big|\, z' \in L^2_{\rm loc}(S;V')\}$, $H^1_\nu(S;H) := \{z \in L^2_\nu(S;H) \,\big|\, z' \in L^2_\nu(S;H)\}$, $\quad \nu \in \mathbb{R}$.

Let $\Phi : V \to (-\infty, +\infty]$ be a proper, convex and lower semicontinuous functional, and $\mathrm{dom}(\Phi) := \{v \in V :\ \Phi(v) < +\infty\}$, $\Phi(0) = 0$. We identify subdifferential $\partial\Phi$ with its graph.

Additionally, assume that the following conditions hold: there exist positive constants K_1, K_2 such that

$$\Phi(v) \geqslant K_1\|v\|^2 \quad \forall\, v \in \mathrm{dom}(\Phi);$$

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant K_2|v_1 - v_2|^2 \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi.$$

Let us consider evolutionary variational inequality

$$y'(t) + \partial\Phi\big(y(t)\big) + u(t)y(t) \ni f(t), \quad t \in S, \tag{1}$$

where $\partial\Phi : V \to 2^{V'}$ is a subdifferential of functional Φ, $D(\partial\Phi) := \{v \in V \mid \partial\Phi(v) \neq \varnothing\}$, $f : S \to V'$ and $u : S \to \mathbb{R}$ are given functions.

Definition. *Let $u \in L^\infty(S; H)$, $f \in L^2_{\rm loc}(S; V')$. The function y is called the* solution *of variational inequality* (1), *if it satisfies the following conditions: **1)** $y \in W^1_{2,\rm loc}(S; H)$; **2)** $y(t) \in D(\partial\Phi)$ for a.e. $t \in S$; **3)** there exists the function $g \in L^2_{\rm loc}(S; V')$ such that for a.e. $t \in S$ we have $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ and $y'(t) + g(t) + u(t)y(t) = f(t)$ in V'.*

For variational inequality (1) consider the problem: find its solution, which satisfies the condition

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-\gamma t}|y(t)| = 0, \tag{2}$$

where $\gamma \in \mathbb{R}$ is given.

The problem of finding the solution of variational inequality (1) for given Φ, u, f, satisfying the condition (2) for given γ, is called the $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$, and function y is called its solution.

Let U be a closed linear subspace of $L^\infty(S)$. Assume that U is the space of controls and for given constants $m, M \in \mathbb{R}$ the set $U_\partial := \Big\{u \in U \,\Big|\, m \leqslant u(t) \leqslant M \quad \text{for a.e.} \quad t \in S\Big\}$ is the set of admissible controls.

We assume that the state of the investigated evolutionary system $y(u) = y(\cdot; u)$ for a given control $u \in U_\partial$ is described by a solution of problem $\mathbf{P}(\Phi, u, f, \gamma)$, when the following conditions hold: $f \in L^2_\gamma(S; H)$ and $K_2 + m + \gamma > 0$.

We assume that the cost functional $J : U \to \mathbb{R}$ has the form

$$J(u) := G(y(u)) + \mu\|u\|^2_U, \quad u \in U,$$

where $\mu > 0$ is a constant, $G : C(S; H) \to \mathbb{R}$ is lower-semi-continuous in $C(S; H)$ and, moreover, $\inf\limits_{z\in C(S;H)} G(z) > -\infty$.

We consider the following **optimal control problem**: find a control $u^* \in U_\partial$ such that

$$J(u^*) = \inf_{u\in U_\partial} J(u). \tag{3}$$

Theorem. *Problem* (3) *has a solution.*

David N. Cheban

Monotone Nonautonomous Differential Equations with the First Integral

State University of Moldova
Faculty of Mathematics and Informatics
Departement of Mathematics
A. Mateevich Street 60
MD–2009 Chişinău, Moldova
E-mail: cheban@usm.md, davidcheban@yahoo.com

Let $\mathbb{R}^n$ be an n-dimensional real Euclidean space with the norm $|\cdot|$. Let us consider a differential equation

$$u' = f(t, u), \tag{1}$$

where $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Along with equation (1) we consider its H-class, i.e., the family of equations

$$v' = g(t, v), \tag{2}$$

where $g \in H(f) = \overline{\{f_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$, $f_\tau(t, u) = f(t + \tau, u)$ for all $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ and by bar we denote the closure in $C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Condition (A1). The function f is said to be regular if for every equation (2) the conditions of existence, uniqueness and extendability on $\mathbb{R}_+$ are fulfilled.

Let $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n :$ such that $x_i \geq 0$ $(x := (x_1, \dots, x_n))$ for any $i = 1, 2, \dots, n\}$ be the cone of nonnegative vectors of $\mathbb{R}^n$. By $\mathbb{R}^n_+$ on the space $\mathbb{R}^n$ is defined a partial order. Namely: $u \leq v$ if $v - u \in \mathbb{R}^n_+$.

Condition (A2). Equation (1) is monotone. This means that the cocycle $\langle \mathbb{R}^n, \varphi, (H(f), \mathbb{R}, \sigma) \rangle$ (or shortly φ) generated by (1) is monotone, i.e., if $u, v \in \mathbb{R}^n$ and $u \leq v$ then $\varphi(t, u, g) \leq \varphi(t, v, g)$ for all $t \geq 0$ and $g \in H(f)$.

Condition (A3). $f_i(t, x) \geq 0$ for all $x \in \Gamma_i$, $t \in \mathbb{R}$ and $i = 1, \dots, n$, where $\Gamma_i := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ x_i = 0\}$.

A function f is said to be Poisson stable (in the positive direction) if there exists a sequence $t_n \to +\infty$ such that $f^{t_n} \to f$ as $n \to \infty$ in the space $C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. It is called strongly Poisson stable in $t \in \mathbb{R}$ uniformly with respect to u on every compact subset of $\mathbb{R}^n$ if the point

$f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (respectively, the motion $\sigma(t, f)$) is strongly Poisson stable in shift dynamical system $(C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \sigma)$.

THEOREM 1. *Suppose that the following assumptions are fulfilled:*

- *the function $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ is strongly Poisson stable in $t \in \mathbb{R}$ uniformly with respect to u on every compact subset from $\mathbb{R}^n$;*
- *each solution $\varphi(t, v, g)$ of equation (2) is bounded on $\mathbb{R}_+$;*

1. *there exists a function $V \in C^1(\mathbb{R}^N_+, \mathbb{R})$ with $\nabla V(x) \gg 0$ for any $x \in \mathbb{R}^n_+$ and $(\nabla V(x), f(t, x)) = 0$ for any $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_+$.*

Then under the conditions $(A1) - (A3)$ the following statements hold:

1. *$\mathbb{R}^n_+$ is invariant with respect to cocycle φ generated by equation (1);*
2. *for any solution $\varphi(t, v, g)$ of equation (2) there exists a solution $\varphi(t, \gamma_v, g)$ of (2) defined and bounded on $\mathbb{R}$;*
3. *if the function $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ is stationary (respectively, τ-periodic, Levitan almost periodic, almost recurrent, almost automorphic, recurrent, strongly Poisson stable) in $t \in \mathbb{R}$ uniformly with respect to u on every compact subset from $\mathbb{R}^n$, then $\varphi(t, \gamma_u, f)$ is also stationary (respectively, τ-periodic, Levitan almost periodic, almost recurrent, almost automorphic, recurrent, strongly Poisson stable);*
4. *$\lim\limits_{t \to \infty} |\varphi(t, v,)g - \varphi(t, \gamma_v, g)| = 0$;*
5. *$\varphi(t, u, f)$ is asymptotically stationary (respectively, asymptotically τ-periodic, asymptotically Levitan almost periodic, asymptotically almost recurrent, asymptotically almost automorphic, asymptotically recurrent, asymptotically strongly Poisson stable).*

[1] David N. Cheban, *Nonautonomous Dynamics:* Nonlinear oscillations and Global attractors. *Springer Nature Switzerland AG 2020,* xxii+ 434 pp.

[2] David Cheban and Zhenxin Liu, Poisson Stable Solutions of Monotone Differential Equations. *SCIENCE CHINA Mathematics,* Vol.62, No.7, 2019, pp.1391-1418.

Arkadii Chikrii

Control of fractional order systems in conflict situation

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: g.chikrii@gmail.com

The paper is devoted to study of the game approach problems for processes with various type fractional derivatives. Apparently the papers [1, 2, 3, 4] were the first in this area. In order to obtain the qualitative result, it is usual practice to consider the quasi-linear systems of ordinary differential equations, for which the Cauchy formula presenting general form of solution, is true. The main peculiarity in this case is that the initial data are separated from the control block. S.D. Eidelman in [2] proposed to consider the representation of solution in the most general form as an object, retaining only the already mentioned separability. This made it possible to encompass in a unique scheme the conflict-controlled processes for wide classes of functional-differential systems, in particular, for the differential-difference and impulse systems, the systems of integral equations, and the systems with fractional derivatives. In the last case, on the basis of the method of resolving functions [5], in collaboration with S.D. Eidelman, the dynamic games with classic Riemann-Liouville fractional derivatives [3] and with the Dzhrbashyan-Nersesyan-Caputo regularized derivatives [2] were studied. Using special LxB measurable set-valued mappings, we obtained sufficient conditions for approaching in a finite time a cylindrical terminal set in the class of quasi- and stroboscopic strategies. When solving model examples, we used asymptotic representations of Mittag-Leffler functions and the technique of Lagrange-Sylvester's interpolation polynomials. The basic studies [1, 2, 3, 4] were further developed for the cases of the Miller-Ross, Hilfer, Grunwald-Letnikov and Hadamard derivatives.

[1] Eidelman S.D., Chikrii A.A. . *Generalized Mittag-Leffler matrix functions in game problems for evolutionary equations of fractional order* // Cybernetics and Systems Analysis. – 2000. – **36**, 3. – P. 315-338.

[2] Eidelman S.D., Chikrii A.A. . *Dynamic game problems of approach for fractional order equations* // Ukrainian Mathematical Journal. – 2000. – **52**, 11. – P. 1787-1806.

[3] Chikrii A.A., Eidelman S.D. . *The game problems of control for quasilinear systems with Riemann–Liouville fractional derivatives* // Cybernetics and Systems Analysis. – 2001. – **37**, 6. – P. 836-864.

[4] Eidelman S.D., Chikrii A.A. . *Game Problems for Fractional Quasilinear Systems Pergamon* // Computers and Mathematics with Applications. – 2002. – **44**. – C. 835-851.

[5] Chikrii A.A. *Conflict–controlled processes* // Springer Science and Businees Media, 2013. – 424 p.

Sergiy Chuiko, Olena Chuiko

Differential-algebraic Cauchy problem with concentrated delay

Donbass State Pedagogical University, Slavyansk, Ukraine
E-mail: chujko-slav@ukr.net

We investigate the problem of the determination of conditions for the existence of solution [1]

$$z(t) \in \mathbb{C}[0,T], \quad z(t) \in \mathbb{C}^1\{[0,T] \setminus \{k\Delta\}_I\}, \quad k = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ q$$

of the linear differential-algebraic Cauchy problem with concentrated delay [2]

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + C(t)z(t-\Delta) + f(t),\ t \in [\Delta, T] \qquad (1)$$

with initial function $z(t) = \varphi(t) \in \mathbb{C}^1[0,\Delta]$. The matrices

$$A(t),\ B(t),\ C(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[0,T] := \mathbb{C}[a,b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}, \quad m \neq n$$

and the vector function $f(t) \in \mathbb{C}[0,T]$ are assumed to be continuous on the segment $[a,b]$. We assume that the matrix $A(t)$ is, generally speaking, rectangular: $m \neq n$. It can be square, but singular.

The conditions of solvability and the structure of a generalized Green operator of the Cauchy problem for a linear differential-algebraic system with concentrated delay are found. The sufficient conditions of reducibility of a differential-algebraic equation with concentrated delay to a sequence of systems joining functional-differential and algebraic equations are constructed.

This work was financially supported by the State Foundation for Basic Research. Number of state Registered 0118U003390.

[1] Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016, 298 p.

[2] Chuiko S. M. On a reduction of the order in a differential-algebraic system. Journal of Mathematical Sciences, 2018, 235, P. 2 – 18.

Sergiy Chuiko [1], *Marina Dzyuba* [2]

Boundary value problem for a system of matrix differential-algebraic equations with pulse action

[1] *Donbass State Pedagogical University, Slavyansk, Ukraine*
E-mail: chujko-slav@ukr.net
[2] *Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine*
E-mail: dziubamaryna2015@ukr.net

We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solutions [1]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} := \mathbb{C}^1\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}\otimes\mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ i=1,\ 2,\ \dots\ ,\ p$$

of linear matrix boundary value problem for a system of matrix differential-algebraic equations with pulse action

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \qquad (1)$$

where [2]

$$\mathcal{A}Z'(t):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$$

matrix differential-algebraic operator and [2]

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \sum_{i=0}^{p}\mathcal{L}_iZ(\cdot):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu},\ i=1,\ 2,\ \dots\ ,\ p.,$$

$$\mathcal{L}_iZ(\cdot) : \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_i,\tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad i=0,\ \dots\ ,\ p-1,\ \tau_0 := a,$$

$$\mathcal{L}_pZ(\cdot):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_p,b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

We also construct a generalized Green's operator of the linear boundary conditions for a system of matrix differential-algebraic equations with pulse action. To solve the matrix differential-algebraic boundary problem with pulse action used original solvability conditions and the structure of the general solution of the linear matrix equation.

[1] Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016, 298 p.

[2] Chuiko S. M., Dzyuba M. V. Matrix boundary-value problem with pulsed action // Nonlinear Oscillations (N.Y.). — 2019. — **238**. — № 3. — P. 333 — 343.

Sergiy Chuiko, Yaroslav Kalinichenko

On a regularization method for solving Noetherian difference boundary value problem

Donbass State Pedagogical University, Slavyansk, Ukraine
E-mail: chujko-slav@ukr.net

We investigate the problem of the determination of conditions for the existence of bounded solution [1] $z(k) \in \mathbb{R}^n$ of the linear difference boundary-value problem [2]

$$z(k+1) = A(k)z(k) + f(k), \quad \ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

The matrix $A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and the vector function $f(k) \in \mathbb{R}^n$ are assumed to be bounded on set

$$k \in \Omega := \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \omega\};$$

$\ell z(\cdot)$ is linear vector-functional

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

bounded on set Ω. The proposed regularization conditions, as well as the scheme for finding of bounded solutions to linear Noetherian boundary value problems for a system of difference equations in the critical case, are illustrated in details with examples. In contrast to the earlier articles of the authors [3], the regularization problem for a linear Noether boundary value problem for a system of difference equations in the critical case has been resolved constructively, and sufficient conditions has been obtained for the existence of a bounded solution to the regularization problem.

This work was financially supported by the State Foundation for Basic Research. Number of state Registered 0118U003390.

[1] Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016, 298 p.

[2] Chuiko S. M., Kalinichenko Ya. V. On a regularization method for solving linear Noetherian boundary value problem for difference system. Proceedings of IAMM NASU, 2018, 32, P. 120 — 135.

[3] Chuiko S. M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action. Journal of Mathematical Sciences, 2014, 197, P. 138 – 150.

Dumitru Cozma, Angela Matei

Center conditions for a cubic differential system having an integrating factor

Tiraspol State University, Chişinău, Republic of Moldova
E-mail: dcozma@gmail.com

We consider the cubic system of differential equations

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

where $P(x, y)$, $Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ are coprime polynomials. The origin $O(0, 0)$ is a singular point for (1) with purely imaginary eigenvalues, i.e. a focus or a center. The purpose of this paper is to find verifiable conditions under which $O(0, 0)$ is a center.

In [1] the problem of the center was solved for system (1) with: at least three invariant straight lines; two invariant straight lines and one irreducible invariant conic. The center conditions for system (1) with two invariant straight lines and one irreducible invariant cubic curve $x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0$ where found in [2].

In this paper we find conditions under which the cubic system (1) has an integrating factor of the form

$$\mu^{-1} = \Phi^h, \tag{2}$$

where $\Phi = x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$ is an irreducible polynomial and a_{ij}, h are real parameters.

By [1], the function (2) is an integrating factor for system (1) iff

$$P(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 0. \tag{3}$$

Identifying the coefficients of the monomials x^iy^j in (3) we obtain an algebraic system of fifteen equations

$$\{F_{ij} = 0,\ i + j = 3, 4, 5\} \tag{4}$$

for the unknowns a_{ij}, h and the coefficients of system (1).

Studying the consistency of system (4) we prove the following:

Theorem 1. *The cubic system (1) has an integrating factor of the form (2) if and only if one of the following conditions holds*

(i) $c = (-4b)/3,\ d = (-4a)/3,\ f = (-a)/3,\ k = [2a(b+3g)]/9,\ l = p = r = 0,\ m = (-2n)/3,\ q = [4a(-b-3g))/9,\ s = (3n - 2b^2 - 6bg)/9,\ a_{03} = a_{12} = a_{21} = 0,\ a_{30} = [2(b+3g)]/9,\ h = 5/3;$

(ii) $d = (5a_{12}^2 - 12aa_{03})/(9a_{03}),\ f = (a_{12}^2 - 6aa_{03} + 27a_{03}^2)/(18a_{03}),\ g = (3a_{03}^2 a_{12} - 6ba_{03}^2 + a_{12}^3)/(18a_{03}^2),\ k = [a_{12}(162aa_{03}^3 + 6aa_{03}a_{12}^2 - 9a_{03}^2 a_{12}^2 - 36ba_{03}^2 a_{12} + 162ra_{03}^2 - a_{12}^4)]/(162a_{03}^3),\ l = (6aa_{03}a_{12} - 9a_{03}^2 a_{12} + 18ba_{03}^2 - a_{12}^3 + 18ra_{12})/(18a_{03}),\ m = (162aa_{03}^3 - 6aa_{03}a_{12}^2 + 9a_{03}^2 a_{12}^2 - 72ba_{03}^2 a_{12} + 162ra_{03}^2 + a_{12}^4 - 12ra_{12}^2)/(54a_{03}^2),\ n = (a_{12}^4 - 108aa_{03}^3 - 6aa_{03}a_{12}^2 + 9a_{03}^2 a_{12}^2 + 18ba_{03}^2 a_{12} - 108ra_{03}^2 + 18ra_{12}^2)/(54a_{03}^2),\ p = (a_{12}^3 - 6aa_{03}a_{12} + 9a_{03}^2 a_{12} - 18ba_{03}^2 - 3ra_{12})/(9a_{03}),\ q = [a_{12}(a_{12}^4 - 27aa_{03}^3 - 6aa_{03}a_{12}^2 + 9a_{03}^2 a_{12}^2 - 9ba_{03}^2 a_{12} - 27ra_{03}^2)]/(81a_{03}^3),\ s = [a_{12}^2(3aa_{03} - ba_{12} + 3r)]/(27a_{03}^2),\ a_{21} = a_{12}^2/(3a_{03}),\ a_{30} = a_{12}^3/(27a_{03}^2),\ a_{12} = (3c+4b)/5,\ h = 5/3;$

(iii) $k = [6ah^2(c-2b) + h(32ab - 16ac + 4ag - 10bd + 5cd - 2dg) + 6(2ac - 4ab + 2bd - cd)]/(6h^2),\ l = [6bh^2 b(d-2a) + h(32ab - 10ac - 16bd + 4bf + 5cd - 2cf) + 6(2bd - 4ab + 2ac - cd)]/(6h^2),\ m = [2h^2(ad - 2a^2 - 4b^2 + 2bc) + h(12a^2 - 8ad + 16b^2 - 12bc + 2c^2 + d^2) + 2(4ad - 4a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2 - d^2)]/(2h^2),\ n = [2h^2(2ad - 4a^2 - 2b^2 + bc) + h(16a^2 - 12ad + 12b^2 - 8bc + c^2 + 2d^2) + 2(4ad - 4a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2 - d^2)]/(2h^2),\ p = [2h^2(2ac - 8ab + 4bd - 2bf - cd + cf) + h(40ab - 14ac - 20bd + 4bf + 7cd - 2cf) + 6(2ac - 4ab + 2bd - cd)]/(2h^2),\ q = [2h^2(4ac - 8ab - 2ag + 2bd - cd + dg) + h(40ab - 20ac + 4ag - 14bd + 7cd - 2dg) + 6(2ac - 4ab + 2bd - cd)]/(2h^2),\ r = [(4ah - 6a - 2dh + 3d + 2fh)(d - 2a)(3h - 4)]/(6h^2),\ s = [(4bh - 6b - 2ch + 3c + 2gh)(c - 2b)(3h - 4)]/(6h^2),\ a_{12} = (2bh - 2b + c)/h,\ a_{21} = (2ah - 2a + d)/h,\ a_{30} = (4bh - 6b - 2ch + 3c + 2gh)/(3h),\ a_{03} = (4ah - 6a - 2dh + 3d + 2fh)/(3h).$

According to [3] the cubic systems (1) which have integrating factors of the form (2) have a center at the origin.

[1] Cozma D. *Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics.* – Chişinău: Ştiinţa, 2013. – 240 p.

[2] Dascalescu A. *Integrability of cubic differential systems with invariant straight lines and invariant cubics.* – Chişinău. PhD Thesis, 2019. – 152 p.

[3] Romanovski V.G, Shafer D.S. *The center and cyclicity problems: a computational algebra approach.* – Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2009. – 348 p.

Alexander Domoshnitsky

Positivity of soulutions for systems of delay differential equations with non-Metzler matrices and its applications in exponential stability

Ariel University, Ariel, Israel

In 1950, Wazewski obtained the following necessary and sufficient condition for positivity of linear systems of ordinary differential equations: the matrix of coefficients is Metzler (i.e. non-diagonal elements in the matrix of coefficients are nonnegative). No results on positivity of solutions to delay systems in the case where the matrix is non-Metzler were expected to be obtained. It was demonstrated that for delay systems the Wazewski condition is not a necessary one. We obtain results on positivity of solutions for non-Metzler systems of delay differential equations. New explicit tests of the exponential stability are obtained as applications of results on positivity for non-Metzler systems. Examples demonstrate possible applications of our theorems to stabilization. For instance, in view of our results, the implicit requirement on dominance of the main diagonal can be skipped. Our approach is based on nonoscillation of solutions and positivity of the Cauchy functions of scalar diagonal delay differential equations.

Andrii Dorosh, Ivan Haiuk, Andrii Pertsov

Boundary value problems for delay integro-differential equations

[1] *Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine*
E-mail: a.dorosh@chnu.edu.ua, ivan.gauk777@gmail.com, pertsov@ukr.net

Boundary value problems for differential and integro-differential equations with delay are an important part of the modern theory of differential-functional equations. Existence and uniqueness of boundary value problems with delay solution in various functional spaces were considered in [1, 2]. Analytical solutions for such problems can only be found for the simplest types of equations, therefore the problem of finding approximate solutions is relevant.The usage of spline functions for solving differential-difference equations was investigated in [3, 4].

In the present note we study an approximate method of solving boundary value problems for integro-differential equations with delay based on cubic spline with defect two approximation of the solution [5, 6].

Let us consider the following boundary value problem

$$y''(x) = f\Big(x, \big[y(x)\big]\Big) + \int\limits_a^b g\Big(x, t, \big[y(x)\big]\Big)dt, \tag{1}$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x), \; p = 0, 1, 2, \; x \in [a^*; a], \; y(b) = \gamma, \tag{2}$$

where $a^* = \min\limits_{x\in[a;b]} \big(x - \tau(x)\big)$, $\big[y(x)\big] = \Big(y\big(x\big), y\big(x - \tau(x)\big), y'\big(x\big), y'\big(x - \tau(x)\big)\Big)$.

Let f, g be continuous functions over a set of their variables and satisfy the Lipschitz condition for variables $y\big(x\big), y\big(x - \tau(x)\big), y'\big(x\big), y'\big(x - \tau(x)\big)$, a delay $\tau(x) \geq 0$ is a function continuous on $[a; b]$ such that a set $E = \big\{x_i \in [a, b] : x_i - \tau(x_i) = a, \; i = 1, 2, \ldots\big\}$ is finite.

We will set a grid $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ on $[a; b]$ such that $E \subset \Delta$. An approximate solution of the problem (1)-(2) will be found in a form of an interpolating cubic spline $S(y, x)$ with defect two on the grid Δ.

The formula of the cubic splines with defect 2 is obtained and their properties are investigated. Based on them, a computational scheme for finding an approximate solution of the boundary value problem (1)-(2) is constructed and substantiated.

Sufficient conditions for the iterative process convergence are obtained and numerical simulations for test cases are conducted.

An application is developed using Node.js and a framework NW.js for carrying out numerical modeling of the boundary value problem (1)-(2). It contains a user-friendly interface for entering model parameters and outputting the results.

Numerical experiments for model test cases show good convergence of the constructed algorithm and confirm the theoretical estimates for errors.

[1] Grim L.J., Schmitt K. *Boundary value problems for delay differential equations* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**, 5. – Pp. 997–1000.

[2] Kamensky G., Myshkis A. *Boundary value problems for nonlinear differential equations with deviating argument of neutral type* // Differential equations. – 1972. – **8**, 12. – Pp. 2171–2179.

[3] Nikolova T.S., Bainov D.D. *Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations* // Yokohama Math. J. – 1981. – **29**, 1. – Pp. 108–122.

[4] Nastasyeva N., Cherevko I. *Cubic splines with defect two and their applications to boundary value problems* // Bulletin of Kyiv University. Physics and mathematics. – 1999. – **1**. – Pp. 69–73.

[5] Cherevko I., Dorosh A. *Existence and approximation of a solution of boundary value problems for delay integro-differential equations* // Journal of Numerical Analysis and Approximation Theory. – 2015. – **44**, 2. – Pp. 154–165.

[6] Haiuk I., Dorosh A., Piddubna L. *Modeling of boundary value problems for nonlinear integro-differential equations with delay* // Materials of XXV International Scientific Conference «Modern Problems of Applied Mathematics and Informatics», September 24-27, 2019, Lviv. – Lviv, 2019. – Pp. 57–61. (in Ukrainian)

Yaroslav Drin' [1], *Roman Petryshyn* [1], *Iryna Drin'* [2], *Svitlana Drin'* [3]

The nonlocal problem for automous quasilinear parabolic pseudodifferential equation with variable symbols and deviating argument

[1] *Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine*
[2] *Chernivtsi Institute of Trade and Economics of Kyiv National University of Trade and Economics, Chernivtsi, Ukraine*
[3] *Department of the Mathematics, National Ubiversity of "Kyiv-Mohyla Academy", Kyiv, Ukraine*
E-mail: drin_jaroslav@i.ua

The brief description of pseudodifferential operator (PDO) with non-smooth symbols was given in [1]. In paper [2] was described the Cauchy problem for autonomous quasilinear equations with deviating argument and smooth constant symbols and in [3] describe the nonlocal problem. In this paper we studying the nonlocal problem from [3] with equation with variable symbols.

Lets $\Pi \equiv \{(t,x)\,|0 < t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$. For functions $a_\xi\colon \Pi \to \mathbb{R}$ are known conditions: 1) functions $a_\xi\colon \Pi \to \mathbb{R}$, $0 \leq \xi \leq p$, are continuous homogeneous by σ order of γ_ξ, where γ_0, γ_1, $\ldots$, γ_p are known real numbers, $\gamma_\xi > 0$, $0 \leq \xi \leq p$, and for $t > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $a_\xi(t, \lambda\sigma) = \lambda^{\gamma_\xi}(t,\sigma)$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_p < \gamma_0$;

2) there is a constant $\delta > 0$ and $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, the inequality $a_0(t,\sigma) \geq \delta|\sigma|^{\gamma_0}$ is true;

3) functions $a_\xi(t,\sigma)$, $\forall\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t \in [0,T]$, $0 \leq \xi \leq p$, are infinitely differential on σ, and for their there are estimations

$$|D^k_\sigma a_\xi(t,\sigma)| \leq C_N|\sigma|^{\gamma_\xi - |k|}, k \in \mathbb{Z}^n_+, \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 1 \leq |\xi| \leq p.$$

The formula

$$Au(t,x) \equiv F^{-1}_{\sigma\to x}\Big[\sum_{\xi=0}^{p} a_\xi(t,\sigma)F_{x\to\sigma}[u(t,x)]\Big], (t,x) \in \Pi,$$

is define PDO with symbol a: $\Pi \to \mathbb{R}$, where $a(t,\sigma) \equiv \sum\limits_{\xi=0}^{p} a_\xi(t,\sigma)$, $(t,\sigma) \in \Pi$ only rapidly decreasing functions $u \in C_1^t \times S(\mathbb{R}^n)$. If $u \in C_{x,t}^{\alpha,[\gamma_0]}(\Pi)$ $[\gamma_0]$ is integer part of $\gamma_0 > 0$, then PDO is defines in [4], [5] and is interpreted as a hypersingular integral operation [4].

Let's consider the nonlocal problem

$$u_t(t,x) + Au(t,x) = f(t,x,\mu u(t-h,x)-$$

$$-\nu u(T+t-h,x)), x \in \mathbb{R}^n, t > h > 0, T >> h, \tag{1}$$

$$\mu u(t,x) = \nu u(T+t,x) + u_0(t,x), x \in \mathbb{R}^n, 0 \le t \le h, \tag{2}$$

where u is the required function, f and u_0 are known continuous and bounded functions, $\mu > \nu >$, h and T are fixed parameters. We also assume that for any $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, and $t > 0$, there exist $C > 0$ and β, $0 < \beta \le \gamma - \varepsilon$, such that

$$|u_0(t,x)| \le C(1+|x|)^\beta,$$

$$|f(t,x,u)| \le C(1+|x|)^\beta,$$

$$|f(t,x,u) - f(t,y,u)| \le C|x-y|^\lambda, 0 < \lambda < 1.$$

Using the step-by-step method we reduce the nonlocal problem for the pseudodifferential equation with deviating argument to the nonlocal problem for the equation without deviations of the argument and to prove the solvability of nonlocal problem (1), (2).

For the problem (1), (2) there are the analog for the theorem 1 [1, p. 19] and theorem 2 [1, p. 20] which was formulated there for nonlocal problem.

[1] Дрінь С.С., Дрінь Я.М. *Дослідження задач з нелокальними умовами для параболічних псевдодиференціальних рівнянь* // Праці V-ї Міжнародної наук.-практ. конф. "Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки (ПІКТ-2016)". – Чернівці, 21–24 травня 2016. – С. 14–21.

[2] Ya.M.Drin and R.I. Petryshyn. *Cauchy problem for autonomous quasilinear parabolic pseudodifferential equations with deviating argument* // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 137, No 1, February, 2014. – P. 29–38.

[3] Ya.M.Drin' and R.I. Petryshyn. *Nonlocal problem for autonomous quasilinear parabolic pseudodifferential equations with deviating argument* // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 217, No 4, September, 2016. – P. 427–440. DOI 10.1007/S10958-016-2983-y.

[4] S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen and A.N. Kochybei. *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudodifferential Equations of Parabolic Type*, Birkhäuser, Basel (2004).

[5] V.A. Litovchenko. *Cauchy problem with Riesz operator of fractional differentiation* // Ukr. Math. J., 57, No 12, 1653–1667((2005); English translation: Ukr. math. J., 57, No 12, 1937–1956 (2005).

Yuli Eidelman

On some inverse and nonlocal problems for operator differential equations and numerical methods for their solution

Tel Aviv University, Israel
e-mail: eideyu@tauex.tau.ac.il

We study some nonlocal problems for operator differential equations of the form

$$\frac{dv}{dt} = Av + f(t)$$

with an unbounded operator A and a vector valued function $f(t)$ in vector spaces. For wide classes of equations we obtain necessary and sufficient conditions of the unique solvability and the formulas for solutions of such problems. In the second part of the talk we present fast numerical algorithms for solution of these problems for matrix equations with rank structured matrices.

Maria Filipkovska

Global solvability and stability of time-varying semilinear differential-algebraic equations

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine
E-mail: filipkovskaya@ilt.kharkov.ua
V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine
E-mail: maria.filipk@gmail.com

Consider implicit differential equations

$$\frac{d}{dt}[A(t)x(t)] + B(t)x(t) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t) + B(t)x(t) = f(t, x(t)), \tag{2}$$

with the initial condition $x(t_0) = x_0$, where $t_0 \geq t_+ \geq 0$, A, $B\colon [t_+, \infty) \to L(\mathbb{R}^n)$, and $f\colon [t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. We do not require the operator $A(t)$ to be nondegenerate. Thus, in the general case, the operator $A(t)$ is degenerate and therefore these equations are called time-varying *differential-algebraic equations* (*DAEs*) or *degenerate differential equations* (they are also called *descriptor systems*). In the terminology of DAEs, equations of the form (1), (2) are commonly referred to as *semilinear*, but they are sometimes called nonlinear (since the function f is nonlinear). Note that the operator $B(t)$ can also be degenerate. The operator pencil $\lambda A(t)+B(t)$ (λ is a complex parameter) which corresponds to the left side (the linear part) of the DAEs (1) and (2) is called characteristic. It is assumed that for each $t \geq t_+$ the pencil $\lambda A(t) + B(t)$ is a regular pencil of index not higher than 1.

A function $x \in C([t_0, t_1), \mathbb{R}^n)$ is said to be a *solution of the equation* (1) *on* $[t_0, t_1)$ ($[t_0, t_1) \subseteq [t_+, \infty)$) if the function $A(t)x(t)$ is continuously differentiable on $[t_0, t_1)$ and $x(t)$ satisfies (1) on $[t_0, t_1)$. If we consider the equation (2), then its solution has to be smoother ($x \in C^1([t_0, t_1), \mathbb{R}^n)$).

DAEs of type (1) are used to describe mathematical models in control theory, radio electronics, robotics, economics, ecology and chemical kinetics. Due to a wide range of applications, DAEs have been studied by many authors.

In the present work, we obtain the theorems on the existence and uniqueness of global solutions, the Lagrange stability (the boundedness of global solutions), the ultimate boundedness (dissipativity) and the Lagrange instability (solutions have finite escape time) of the time-varying semilinear DAEs (1), (2). Also, we obtain the theorems on the Lyapunov stability, asymptotic stability and instability and the asymptotic stability in the large (complete stability).

This work, in particular, extends and generalizes the results concerning the global solvability and Lagrange stability of time-invariant semilinear DAEs with the regular characteristic pencil, which were obtained earlier. For example, the theorems on the existence and uniqueness of global solutions for these DAEs were obtained in [1, 2], and the theorems on the Lagrange stability (which also include the conditions of the global solvability) and the Lagrange instability were obtained in [3]. Also, in [4], the combined numerical methods for these DAEs were obtained and it was verified that the results of applying the theorems from [3] were consistent with the results of numerical experiments. The theorems on the Lagrange stability and instability for the time-invariant semilinear DAEs with the singular characteristic pencil were obtained in [5].

The work supported by the National Academy of Sciences of Ukraine (project 0119U102376 "Qualitative, asymptotic and numerical analysis of various classes of differential equations and dynamical systems, their classification, and practical application").

[1] Филипковская М.С. *Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике* // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Серія: Мат. модел. Інформ. техн. Авт. сист. упр. – 2012. – **19**, No. 1015. – С. 306–319.

[2] Руткас А.Г., Филипковская М.С. *Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений* // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – No. 1 (111). – С. 135–145.

[3] Filipkovska M.S. *Lagrange stability of semilinear differential-algebraic equations and application to nonlinear electrical circuits, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry* // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2018. – **14**, No. 2. – P. 169–196.

[4] Filipkovska M.S. *Two combined methods for the global solution of implicit semilinear differential equations with the use of spectral projectors and Taylor expansions* // International Journal of Computing Science and Mathematics. – 2019. — DOI: 10.1504/IJCSM.2019.10025236 (in press)

[5] Filipkovskaya M.S. *Lagrange stability and instability of nonregular semilinear differential-algebraic equations and applications* // Ukrainian Mathematical Journal. – 2018. – **70**, No. 6. – P. 947–979.

Urszula Foryś

Simple criss-cross model of epidemic spread in heterogeneous populations

University of Warsaw, Fac. Math., Inf. & Mech.
Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland
E-mail: urszula@mimuw.edu.pl

On the basis of [1] I would like to describe simple model an epidemic spread in heterogeneous populations in which one of the subpopulations could be considered as a superspreader. Although in [1] we focused on tuberculosis, but the presented analysis is valid for any infectious disease, also for COVID-19, whenever the population is non-homogeneous.

We studied a criss-cross model based on the well-know SIS model with constant inflow into both subpopulations and bilinear transmission function. Basic reproduction number $\mathcal{R}_0$ was calculated and considered as a threshold parameter for the general model. It is important to note that having two subpopulations described by different parameters it is not enough to consider the spread of epidemic in both of them separately, and criss-cross model is necessary to get proper conditions of this spread in the whole population. Our analysis confirms the hypothesis that even if one of the subpopulations is small but have high risk of infection and highly spread the disease then such individuals may be a specific reservoir of the pathogen and the disease may be transmitted from this subpopulation to the general population.

[1] Bodzioch M., Choiński M., Foryś U. *SIS criss-cross model of tuberculosis in heterogeneous population.* – Discrete And Continuous Dynamical Systems-series B. –2019. –**24**, 5. –2169–2188.

Vasile Glavan[1], *Valeriu Guţu*[2]

Recurrent subdynamics on viable sets under discrete inclusions

[1] *Siedlce University, Institute of Mathematics, Siedlce, Poland*
E-mail: vglavan@uph.edu.pl
[2] *Moldova State University, Chişinău, Republic of Moldova*
E-mail: vgutu@yahoo.com

The Conley Decomposition Theorem [1] is one of the most fundamental theorems in the theory of dynamical systems. Charles Conley introduced a very weak form of recurrence for flows, which he called "chain recurrence". He then proved the existence of what he termed as "complete Lyapunov function", a real-valued function strictly decreasing everywhere except on components of the chain-recurrent set, where it is constant.

A similar theorem holds true for iterations of continuous functions [2], and of closed relations [3]. D. Norton calls Conley's theorem "The Fundamental Theorem of the Dynamical Systems".

In our report we aim to generalize these results to the subdynamics, generated by discrete inclusions, restricted upon compact weakly invariant, or, in other terms, viable subsets.

Consider the discrete inclusion $x_{n+1} \in \mathcal{F}(x_n)$ $(n \in \mathbb{Z})$, with $\mathcal{F}$ as an upper semicontinuous multifunction, defined on the complete metric space (X, d), and taking nonempty compact values. A sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{Z},\mathbb{Z}_+}$, such that $x_{n+1} \in \mathcal{F}(x_n)$, is referred to as a *chain*. If instead of inclusion one has the inequality $\varrho(x_{n+1}, \mathcal{F}(x_n)) \leq \delta$ for some $\delta \geq 0$, then one speaks about a δ-*chain*. (Here $\varrho(a, B)$ means the Hausdorff-Pompeiu semi-distanse of the point a from the subset B.)

Associated with any multifunction $\mathcal{F}$ there is a series of limit relations, as, e.g., the ω-limit relation, the recurrent relation, the Ω-limit relation, the generalized non wandering relation, and the chain-recurrent, or Conley's relation $\mathcal{CF}$, the last one being defined as follows: $y \in \mathcal{CF}(x) \iff \forall\varepsilon > 0$ there is an ε-chain beginning at x and ending at y. This relation is closed and transitive [3].

Any fixed point of Conley's relation is called *chain-recurrent* and the subset $|\mathcal{CF}|$ of all chain-recurrent points is called the *chain-recurrent set* of the multifunction $\mathcal{F}$. It is closed and invariant. The relation $\mathcal{CF}$

induces a partial order, which, in turn, generates an equivalent relation on the chain recurrent set. This relation partitions the chain recurrent set $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ into equivalence classes. Each class is chain transitive. If X is compact there is at most a countable infinite number of such classes, called *basic sets* [3].

Recall, that a subset $\Lambda \subset X$ is said to be *invariant*, if **every** chain, starting at a point from Λ, remains in Λ.

The subset Λ is said to be *viable* on $\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$, if for every $x \in \Lambda$ **there exists** at least a chain $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}}$ such that $x_0 = x$ and $x_n \in \Lambda$ for all $n \in \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$. Fixed points and periodic chains represent the simplest viable subsets of an inclusion.

So, given a closed viable subset, one can restrict on it the dynamics of the discrete inclusion, taking into account only the chains, that remain forever in this subset. This subdynamics is not so rich as the initial one, but, in some cases, permits to preserve the recurrence properties and some limit relations of the initial discrete inclusion.

A continuous real valued function L on X is called a *Lyapunov function* for the discrete inclusion $x_{n+1} \in \mathcal{F}(x_n)$ $(n \in \mathbb{Z})$, if $y \in \mathcal{F}(x) \Rightarrow L(y) \leq L(x)$. If, in addition, $L(x) = L(y)$ if and only if x and y lie in the same equivalent class, then L is said to be *complete*.

THEOREM. *Given the upper semicontinuous compactly valued multifunction $\mathcal{F}$ and the compact viable on $\mathbb{Z}$ subset $\Lambda \subset X$, there exists a complete Lyapunov function for the restricted on Λ discrete inclusion: $x_{n+1} \in (\mathcal{F}|\Lambda)(x_n)$ $(n \in \mathbb{Z})$.*

In other words, the complete Lyapunov function decreases strictly beyond the chain recurrent subset of Λ and separates basic sets in $\mathcal{C}(\mathcal{F}|\Lambda)$.

In the case of an affine Iterated Function Sistem with a "coherent hyperbolic structure" we characterize the maximal compact viable on $\mathbb{Z}$ subset as the closure of the periodic points, and describe the "chaotic" subdynamics on it [4].

[1] Conley C. *Isolated invariant sets and the Morse index.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 38. – Providence, RI: AMS, 1978.

[2] Norton D. E. *The fundamental theorem of dynamical systems.* // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1995. – **36**, 3. – P. 585–597.

[3] Akin E. *The General Topology of Dynamical Systems.* – Providence, RI: AMS, 1993.

[4] Glavan V., Guţu V. *Uniformly hyperbolic viable sets in affine IFS.* In: New Trends in Differential Equations, Control Theory and Optimization. V. Barbu, C. Lefter, I. Vrabie (eds.). – World Scientific, New Jersey, 2016. – P. 141–154.

Oksana Hentosh

Central extensions of some superconformal loop Lie algebra generalization and compatibly bi-Hamiltonian $(2|N+1)$-dimensional systems

Pidsryhach IAPMM, NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine
E-mail: ohen@ua.fm

Let us consider the semi-direct sum $\tilde{\mathcal{G}} \ltimes \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$ of the loop Lie algebra $\tilde{\mathcal{G}} := \widetilde{diff}(\mathbb{T}^{1|N})$, consisting of the superconformal vector fields on a supertor $\mathbb{T}^{1|N}$ such as $\tilde{a} := a\partial/\partial x + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(D_{\vartheta_i}a)D_{\vartheta_i}$, where $N \in \{1,2,3\}$, $a := a(x,\vartheta;\lambda) \in C^{\infty}(\mathbb{T}^{1|N} \times (\mathbb{D}^1_+ \cup \mathbb{D}^1_-);\Lambda_0)$, $(x,\vartheta) \in \mathbb{T}^{1|N} \simeq \mathbb{S}^1 \times \Lambda_1^N$, $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ is a infinite-dimensional Grassmann algebra over $\mathbb{C} \supset \Lambda_0$, $\vartheta := (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N)$ and $D_{\vartheta_i} := \partial/\partial\vartheta_i + \vartheta_i\partial/\partial x$, $i = \overline{1,N}$, which are holomorphic in the "spectral" parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ on the interior $\mathbb{D}^1_+ \subset \mathbb{C}$ and exterior $\mathbb{D}^1_- \subset \mathbb{C}$ regions of the unit centrally located disk $\mathbb{D}^1 \subset \mathbb{C}$, and its regular dual space $\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$ with respect to the parity:

$$(\tilde{l},\tilde{a})_0 = \operatorname{res}\lambda^{-1}\int_{\mathbb{T}^{1|N}} dx d^N\vartheta\,(la), \tag{1}$$

where $\tilde{l} := l(x,\vartheta;\lambda)(dx + \sum_{i=1}^{N}\vartheta_i d\vartheta_i) \in \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$, $l \in C^{\infty}(\mathbb{T}^{1|(2k-1)} \times (\mathbb{D}^1_+ \cup \mathbb{D}^1_-);\Lambda_1)$ if $N = 2k-1$ and $l \in C^{\infty}(\mathbb{T}^{1|2k} \times (\mathbb{D}^1_+ \cup \mathbb{D}^1_-);\Lambda_0)$ if $N = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. The loop Lie algebra $\tilde{\mathcal{G}}$ splits into the direct sum $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}_-$ of its Lie subalgebras for which $\tilde{\mathcal{G}}^*_{+,reg} \simeq \tilde{\mathcal{G}}_-$, $\tilde{\mathcal{G}}^*_{-,reg} \simeq \tilde{\mathcal{G}}_+$. Here $\tilde{a}(\infty) = 0$ for any $\tilde{a}(\lambda) \in \tilde{\mathcal{G}}_-$. On $\tilde{\mathcal{G}} \ltimes \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$ one determines the commutator:

$$[\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, \tilde{b} \ltimes \tilde{m}] := [\tilde{a},\tilde{b}] \ltimes (ad^*_{\tilde{a}}\tilde{m} - ad^*_{\tilde{b}}\tilde{l}), \quad \tilde{a},\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{G}}, \quad \tilde{l},\tilde{m} \in \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg},$$

where $[\tilde{a},\tilde{b}] = \tilde{c}$, $\tilde{c} := c\partial/\partial x + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(D_{\vartheta_i}c)D_{\vartheta_i}$, $c := a(\partial b/\partial x) - b(\partial a/\partial x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(D_{\vartheta_i}a)(D_{\vartheta_i}b)$, the symbol "$ad^*$" denotes the co-adjoint action of $\tilde{\mathcal{G}}$ with respect to the parity (1) and $ad^*_a l = l_x a + \frac{4-N}{2} l a_x + \frac{(-1)^{N+1}}{2}\sum_{i=1}^{N}(D_{\vartheta_i}l)(D_{\vartheta_i}a)$ for any $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{G}}$ and a fixed element $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$, and the nondegenerate symmetric bilinear form such that $(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, \tilde{b} \ltimes \tilde{m}) =$

$(\tilde l,\tilde b)_0+(\tilde m,\tilde a)_0$. For $N\in\{1,2,3\}$ one constructs the central extensions $\hat{\mathfrak{G}}:=\tilde{\mathfrak{G}}\oplus\mathbb{C}^2$ of the Lie algebra $\tilde{\mathfrak{G}}:=\prod_{z\in\mathbb{S}^1}(\tilde{\mathcal{G}}\ltimes\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg})$ by the superanalogs of the two-dimensional Ovsienko-Roger 2-cocycle:

$$\omega_2(\tilde a\ltimes\tilde l,\tilde b\ltimes\tilde m):=(\omega_2^1(\tilde a\ltimes\tilde l,\tilde b\ltimes\tilde m),\omega_2^2(\tilde a\ltimes\tilde l,\tilde b\ltimes\tilde m)),$$

where $\omega_2^1(\tilde a\ltimes\tilde l,\tilde b\ltimes\tilde m)=\operatorname{res}\lambda^{-1}\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{T}^{1|N}}dzdxd^N\vartheta\,(a(\mathcal{P}b))$, $\omega_2^2(\tilde a\ltimes\tilde l,\tilde b\ltimes\tilde m)=\operatorname{res}\lambda^{-1}\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{T}^{1|N}}dzdxd^N\vartheta\,(l(\partial b/\partial z)-m(\partial a/\partial z))$ for any $(\tilde a\ltimes\tilde l)$ and $(\tilde b\ltimes\tilde m)\in\tilde{\mathfrak{G}}$, $z\in\mathbb{S}^1$. In addition, $\mathcal{P}=D_{\vartheta_1}\partial^2/\partial^2x$ when $N=1$, $\mathcal{P}=D_{\vartheta_1}D_{\vartheta_2}\partial/\partial x$ when $N=2$ as well as $\mathcal{P}=D_{\vartheta_1}D_{\vartheta_2}D_{\vartheta_3}$ when $N=3$.

Since the Lie algebra $\tilde{\mathfrak{G}}$ permits the standard splitting $\tilde{\mathfrak{G}}:=\tilde{\mathfrak{G}}_+\oplus\tilde{\mathfrak{G}}_-$ into a direct sum of its Lie subalgebras $\tilde{\mathfrak{G}}_+:=\prod_{z\in\mathbb{S}^1}(\tilde{\mathcal{G}}_+\ltimes\tilde{\mathcal{G}}^*_{-,reg})$ and $\tilde{\mathfrak{G}}_-:=\prod_{z\in\mathbb{S}^1}(\tilde{\mathcal{G}}_-\ltimes\tilde{\mathcal{G}}^*_{+,reg}))$, one can introduce the $\mathcal{R}$-deformed Lie-Poisson bracket:

$$\begin{aligned}\{\mu,\nu\}_{\mathcal{R}}(\tilde a\ltimes\tilde l)&=(\tilde a\ltimes\tilde l,[R\nabla_r\mu(\tilde a\ltimes\tilde l),\nabla_l\nu(\tilde a\ltimes\tilde l)])+\\&+(\tilde a\ltimes\tilde l,[\nabla_r\mu(\tilde a\ltimes\tilde l),R\nabla_l\nu(\tilde a\ltimes\tilde l)])+\\+<e,\omega_2(R\nabla_r\mu(\tilde a\ltimes\tilde l),&\nabla_l\nu(\tilde a\ltimes\tilde l))+\omega_2(\nabla_r\mu(\tilde a\ltimes\tilde l),R\nabla_l\nu(\tilde a\ltimes\tilde l))>,\end{aligned}\tag{2}$$

where $\mu,\nu\in\mathcal{D}(\tilde{\mathfrak{G}}^*)$ are arbitrary smooth by Frechet functionals on $\tilde{\mathfrak{G}}^*$, $e=(e_1,e_2)\in\mathbb{C}^2$, $\mathcal{R}=(P_+-P_-)/2$, P_+ and P_- are projectors on $\tilde{\mathfrak{G}}_+$ and $\tilde{\mathfrak{G}}_-$ respectively, on the dual space $\tilde{\mathfrak{G}}^*\simeq\tilde{\mathfrak{G}}$ to the Lie algebra $\tilde{\mathfrak{G}}$. Here $\nabla_l h(\tilde a\ltimes\tilde l):=(\nabla_l h_{\tilde l}\ltimes\nabla_l h_{\tilde a})\in\tilde{\mathfrak{G}}$ and $\nabla_r h(\tilde a\ltimes\tilde l):=(\nabla_r h_{\tilde l}\ltimes\nabla_r h_{\tilde a})\in\tilde{\mathfrak{G}}$ are left and right gradients of any smooth functional $h\in\mathcal{D}(\tilde{\mathfrak{G}}^*)$ at a point $(\tilde a\ltimes\tilde l)\in\tilde{\mathfrak{G}}^*$. Due to the Adler-Kostant-Symes theory the Lie-Poisson bracket (2) generates the hierarchy of Hamiltonian flows:

$$\partial(\tilde a\ltimes\tilde l)/\partial t_p:=-ad^*_{P_+\nabla_l h^{(p)}(\tilde a\ltimes\tilde l)}(\tilde a\ltimes\tilde l)=\{\tilde a\ltimes\tilde l,h^{(p)}\}_{\mathcal{R}},\quad p\in\mathbb{Z}_+,\tag{3}$$

where $P_+\nabla_l h^{(p)}(\tilde a\ltimes\tilde l)=(\nabla_l h^{(p)}_{\tilde l,+}\ltimes\nabla_l h^{(p)}_{\tilde a,+})$, $\nabla_l h^{(p)}(\tilde a\ltimes\tilde l)=\lambda^p\nabla_l h(\tilde a\ltimes\tilde l)$, $\nabla_l h_{\tilde l}\sim\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\nabla_l h_{\tilde l,j}\lambda^{-j}$ and $\nabla_l h_{\tilde a}\sim\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\nabla_l h_{\tilde a,j}\lambda^{-j}$ as $|\lambda|\to\infty$, for any Casimir invariant $h\in I(\hat{\mathfrak{G}}^*)$, satisfying the relationship $ad^*_{\nabla_l h(\tilde a\ltimes\tilde l)}(\tilde a\ltimes\tilde l)=0$ at a point $(\tilde a\ltimes\tilde l)\in\tilde{\mathfrak{G}}^*$.

The hierarchy (3) is shown to be reduced on coadjoint orbits of the Lie algebra $\hat{\mathfrak{G}}$, generated by the elements such as $\tilde l\ltimes\tilde a$, where $a:=\sum_{k=1}^{K-1}a_k(x,\vartheta)\lambda^k-\lambda^K$ and $l:=\sum_{k=1}^{K-1}l_k(x,\vartheta)\lambda^k$, $K\in\mathbb{N}$, to the hierarchy of compatible bi-Hamiltonian $(2|N+1)$-dimensional systems on functional supermanifolds and its matrix Lax representation is found by use of the gradient-holonomic algorithm.

Nadiia Huzyk

Coefficient inverse problem for the weakly degenerate parabolic equation

Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy, Lviv, Ukraine
E-mail: hryntsiv@ukr.net

In a domain $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ we consider an inverse problem for simultaneous determination of the time dependent coefficients $b_1 = b_1(t), b_2 = b_2(t)$ in the one-dimensional degenerate parabolic equation

$$\psi(t)u_t = a(t)u_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

with initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

boundary conditions

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T] \tag{3}$$

and overdetermination conditions

$$\int\limits_0^h u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

$$\int\limits_0^h xu(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

A triplet of functions $(b_1, b_2, u) \in (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, is called a solution to the problem (1)-(5) if it verifies the equation (1) and conditions (2)-(5).

It is known that $a(t) > 0, t \in [0,T], \psi(t) > 0, t \in (0,T], \psi(0) = 0.$ We will investigate the case of weak degeneration, when $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0.$ Applying the Schauder fixed point theorem there is established conditions of existence of the solution to the named problem. The proof of the uniqueness is based on the properties of the solutions of the homogeneous integral equations of the second kind with integrable kernels.

Nina Kasimova

Optimal Control Problem in Coefficients for Degenerate Parabolic Variational Inequality: Solvability Issue

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
E-mail: zadoianchuk.nv@gmail.com

We investigate an optimal control problem in coefficients for degenerate parabolic variational inequality. Since these types of problems can exhibit the Lavrentieff phenomenon and non-uniqueness of weak solutions, there several possible statements of such problems depending on the choice of the class of admissible solutions. In [1] we consider the optimal control problem in the so-called class of H-admissible solutions. Using the classical approach to parabolic variational inequalities, we show that the set of admissible pairs is not empty. We prove some topological properties of the set of H-admissible solutions and show that this set possesses some compactness properties with respect to the appropriate convergence in variable spaces. Using, the direct method in Calculus of variations, we prove the theorem on the existence of H-optimal solutions.

[1] Kasimova N.V. *Solvability Issue for Optimal Control Problem in Coefficients for Degenerate Parabolic Variational Inequality* // Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. – 2020 (in print).

Vitalii Konarovskyi

Sticky-Reflected Stochastic Heat Equation Driven by Colored Noise

Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine
E-mail: konarovskiy@gmail.com

We will discuss the existence a weak solution to the following SPDE

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X_t}{\partial u^2} + \lambda \mathbb{I}_{\{X_t=0\}} + \mathbb{I}_{\{X_t>0\}} Q\dot{W}_t \tag{1}$$

with Dirichlet boundary conditions

$$X_t(0) = X_t(1) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

and initial condition

$$X_0(u) = g(u), \quad u \in [0,1], \tag{3}$$

where $\dot{W}$ is a space-time white noise, the functions $g \in \mathcal{C}[0,1]$ and $\lambda \in L_2[0,1]$ are non-negative, and Q is a non-negative definite self-adjoint Hilbert-Schmidt operator on $L_2[0,1]$. We also assume that $g(0) = g(1) = 0$.

The equation appears as a sticky-reflected counterpart of the reflected SPDE introduced in [1, 3]. In our case, the solution X obeys the usual stochastic heat equation being strictly positive, but reaching zero, its diffusion vanishes and a drift at zero pushes the process to be positive. Remark that the form of equation (1) is similar to the form of the SDE for the well-known sticky-reflected Brownian motion on $[0,\infty)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda \mathbb{I}_{\{x(t)=0\}} + \mathbb{I}_{\{x(t)>0\}} \sigma \dot{w}(t).$$

We next give a precise definition of a solution to the equation above. So, we say that a continuous function $X : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ is a *weak solution* to SPDE (1)-(3), if $X_0 = g$ and for every $\varphi \in \mathcal{C}^2[0,1]$ satisfying $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ the process

$$M_t^{\varphi} = (X_t, \varphi)_{L_2} - \frac{1}{2}\int_0^t (X_s, \varphi'')_{L_2} ds - \int_0^t (\lambda \mathbb{I}_{\{X_s=0\}}, \varphi)_{L_2} ds, \quad t \geq 0,$$

is an $(\mathcal{F}_t^X)$- martingale with quadratic variation

$$\langle M^\varphi \rangle_t = \int_0^t \left\| Q(\mathbb{I}_{\{X_s>0\}}\varphi) \right\|_{L_2}^2 ds, \quad t \geq 0,$$

where $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ and $\|\cdot\|_{L_2}$ denote the inner product and the norm in $L_2[0,1]$, respectively.

Let $\{e_k,\ k\geq 1\}$ be the basis in $L_2[0,1]$ consisting of eigenvectors of the non-negative definite self-adjoint operator Q. Let also $\{\mu_k,\ k\geq 1\}$ be the corresponding family of eigenvalues of Q. We note that $\sum_{k=1}^\infty \mu_k^2 < \infty$, since Q is a Hilbert-Schmidt operator. Introduce the function

$$\chi^2 := \sum_{k=1}^\infty \mu_k^2 e_k^2,$$

where the series trivially converges in $L^1[0,1]$ and a.e. The main result reads as follows.

Theorem 1 (Existence of solutions). *If*

$$\lambda \mathbb{I}_{\{\chi>0\}} = \lambda \quad \text{a.e.},$$

then SPDE (1)-(3) *admits a weak solution.*

The proof of the theorem can be found in [2]. We remark that the uniqueness of solution to (1)-(3) remains an open problem.

[1] Haussmann U. G., Pardoux É. *Stochastic variational inequalities of parabolic type* // Appl. Math. Optim. – 1989. – **20**, no. 2.– P. 163-192.

[2] Konarovskyi V. V. *Sticky-reflected stochastic heat equation driven by colored noise* // arXiv:2005.11773. – 2020. – 37 p.

[3] Nualart D., Pardoux É. *White noise driven quasilinear SPDEs with reflection* // Probab. Theory Related Fields. – 1992. – **93**, no. 1.– P. 77-89.

Bohdan Kopytko, Roman Shevchuk

Diffusion processes in media with membranes and some nonlocal parabolic conjugation problems

[1] *Czestochowa University of Technology, Czestochowa, Poland*
E-mail: bohdan.kopytko@im.pcz.pl
[2] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*
E-mail: r.v.shevchuk@gmail.com

We consider two interrelated issues: first, a proof of a classical solvability of a certain conjugation problem for a linear one-dimensional parabolic equation of the second order with the nonlocal conjugation condition containing the integral term; second, a construction, by using its solution, of the two-parameter Feller semigroup associated with the inhomogeneous Markov process on the given region of the real line. The union of these two issues represents the so-called problem on pasting together two diffusion processes, which are given by their generating differential operators in subdomains of the mentioned region. This problem can also be treated as the problem on mathematical modeling of diffusion in medium with membranes (see [1]). It is assumed that at the boundary points of the domains, where the moving membranes are placed, certain variants of the general boundary condition or the conjugation condition of Feller-Wentzell [2] are given. According to our understanding, the concept of a moving membrane means that its position on the real line changes and is determined by a given function which, as well as the process itself, depends on the time variable

We study in detail the case, when the boundary conditions given on the outer boundaries of the considered domains correspond to the property of total internal reflection of diffusion process and the conjugation condition defined on the common boundary of these domains corresponds to the partial reflection of process in combination with the possibility of its leaving the boundary by jumps.

[1] Portenko M.I. *Diffusion processes in media with membranes.* – Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 1995.

[2] Wentzell A.D. *Semigroups of operators that correspond to a generalized differential operator of second order* // Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.). – 1956. – **111**, 2. – P. 269–272.

Andrey Kostin

Examples of non-uniqueness of solutions in inverse problems for parabolic and elliptic equations

MEPhI, Moscow, Russia
E-mail: abkostin@yandex.ru

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, $Q = \Omega \times (0, T)$. The task is to find a pair of functions $\{w(x,t), p(x)\}$ that satisfy the conditions

$$w_t(x,t) - Lw(x,t) = h(x,t)p(x), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$w(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \quad w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S \equiv \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

$$w(x,T) = \chi(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

where $h(x,t)$, $\chi(x)$ are given sufficiently smooth functions and L is a uniformly elliptic operator defined as

$$Lw = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial w}{\partial x_i} + c_0(x)w\,,$$

where the coefficients $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})$; $b_i\,,\ c_0 \in L_\infty(\Omega)$ are real functions. It was proved in [1]–[3] that, under the conditions

$$c_0(x) \le 0 \text{ in } \Omega\,;\ h(x,t) \ge 0\,,\ h_t(x,t) \ge 0 \text{ in } Q\,;\ h(x,T) > 0 \text{ in } \Omega \tag{4}$$

inverse problem (1)–(3) has a unique solution. We show that condition $h_t(x,t) \ge 0$ in Q from (4), cannot be discarded without introducing additional constraints (even if the other assumptions on $h(x,t)$ are stronger). Specifically, if only

$$c_0(x) \le 0 \quad \text{in } \Omega\,; \quad h(x,t) \ge \delta > 0 \quad \text{in } Q$$

then the homogeneous inverse problem can have a nontrivial solution and the solution of inverse problem (1)–(3) is not unique. The operator L, the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, the function h and the corresponding nontrivial solutions of the parabolic inverse problem are given in explicit form.

From the expressions for these solutions, we establish that they are analytic functions of their arguments. The case $n = 1$ was considered in [2]. Examples with nonunique solutions are also constructed for inverse problems similar in formulation to problem (1)–(3), but for elliptic and hyperbolic equations. A feature shared by the basic examples of elliptic operator with real coefficients has a complex eigenvalue. Our consideration is restricted to $n = 2$, although examples of a nonunique solution are also available for $n \geqslant 3$. Note also that the necessary and sufficient uniqueness conditions can be formulated in terms of the completeness of a system of functions associated with inverse problem (1)–(3) (see [4, 5]). The relation of solution uniqueness in an inverse problem to the zeros of a certain entire function and to the point spectrum of the operator was noted in [6–8].

[1] Prilepko A. I., Solov'ev V. V. *Solvability theorems and Rothe's method in inverse problems for parabolic equations*// Differ. Uravn. – 1987 – **23**, P. 1971–1980.

[2] Isakov V. *Inverse parabolic problems with the final over determination* // Commun. Pure Appl. Math. – 1991 – **144**, P. 185–209.

[3] Prilepko A. I., Kostin A. B.. *On certain inverse problems for parabolic equations with final and integral observation* // Russ. Acad. Sci. Sb. Math. – 1993 – **75**, P. 473–490.

[4] Kostin A. B. *Basis property of a system of functions related to the inverse problem of finding the source* // Differ. Equations. – 2008 – **44**, P. 256–266.

[5] Kostin A. B. *Criteria of the Uniqueness of Solutions and Well-Posedness of Inverse Source Problems* // J Math Sci. – 2018 – **230**, P. 907–949. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3799-8

[6] Eidel'man Yu. S. *Uniqueness of a solution to an inverse problem for a differential equation in Banach space* // Differ. Uravn. – 1987 – **23**, P. 1647–1649.

[7] Eidel'man Yu. S. *Certain inverse problems for parabolic and elliptic operator differential equations* // Ukr. Mat. Zh. – 1993 – **45**, P. 120–127.

[8] Tikhonov I. V., Eidel'man Yu. S. *Uniqueness criterion in an inverse problem for an abstract differential equation with nonstationary inhomogeneous term* // Math. Notes – 2005 – **77**, P. 246–262.

Yakov Krasnov

Operator method for the solution of PDEs

Bar-Ilan University, 52900 Ramat-Gan, Israel
E-mail: krasnov@math.biu.ac.il

The symmetry operator method for finding the analytical form of solutions of a given partial differential equations was first presented in the paper [1].

The mechanism for performing this method is as follows:

- To calculate and estimate the Lie algebra's infinitesimal symmetries admitted by the given system with the partial derivatives.
- To determine the merger rules.
- And after this, to make a calibration, and to establish the commutator relations.

We discuss in this talk several examples of differential systems of great importance in mathematical physics, such as heat splitting, the Euler-Tricomi equation, the generalized Cauchy-Riemann equation, and the Dirac equations in a non-associative algebras.

As a continuation of an article [2], we show how to construct symmetry operators for the system of partial differential equations in matrix form.

We also propose to build an analytical, polynomial, and exponential-polynomial solutions of differential systems using the symmetry operator approach and its implementations by the MAPLE package.

[1] Samuil D Eidelman, Yakov Krasnov, *Operator method for solution of PDEs based on their symmetries.* In: Operator theory, systems theory and scattering theory: multidimensional generalizations, Birkh́auser Basel, 2005; 107-137

[2] Yakov Krasnov. *Analytic function theory in algebras.* Georgian Mathematical Journal 14 (3), 2007: 471-481

Peter Kuchment

Partial Differential Equations and Medical Imaging

Mathematics Department, Texas A&M University
College Station, TX 77840 USA
E-mail: kuchment@math.tamu.edu

The novel medical diagnostic imaging techniques lead to fascinating new problems for PDEs, harmonic analysis, spectral theory, etc., all the way to algebraic geometry. In this talk, I will describe some aspects of their relation to PDEs.

[1] P. Kuchment, *The Radon Transform and Mathematical Imaging*, SIAM 2014.
[2] P. Kuchment and L. Kunyansky, Mathematics of thermoacoustic tomography, European J. Appl. Math., 19 (2008), Issue 02, 191-224

Liudmyla Kusik

Existence conditions and asymptotics for solutions of one class of second-order differential equations

Odesa National Marine University, Odesa, Ukrane
E-mail: lk09032017@gmail.com

Consider the differential equation

$$y'' = \alpha_0 p(t)|y)|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}L_0(y), \tag{1}$$

where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ is a continuous function, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $L_0 : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ is continuous and slowly varying as $y \to Y_0$ function, Δ_{Y_i} $(i \in \{0, 1\})$ is a one-side neighborhood of Y_i and $Y_i \in \{0; \pm\infty\}$ $(i \in \{0, 1\})$. We assume that the numbers μ_i $(i = 0, 1)$ given by the formula

$$\mu_i = \begin{cases} \ \ 1 & \text{if eigher } Y_i = +\infty \quad \text{or} \\ & Y_i = 0 \quad \text{and} \quad \Delta_{Y_i} \quad \text{is right neighborhood of the point } 0, \\ -1 & \text{if eigher } Y_i = -\infty \quad \text{or} \\ & Y_i = 0 \quad \text{and} \quad \Delta_{Y_i} \quad \text{is left neighborhood of the point } 0, \end{cases}$$

satisfy the relations

$$\mu_0\mu_1 > 0 \quad \text{for} \quad Y_0 = \pm\infty \quad \text{and} \quad \mu_0\mu_1 < 0 \quad \text{for} \quad Y_0 = 0. \tag{2}$$

Conditions (2) are necessary for the existence of solutions of Eq.(1) defined in a left neighborhood of ω and satisfying the conditions

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \qquad \text{for } t \in [t_0, \omega[\ , \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1). \tag{3}$$

We study Eq.(1) on class $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- solutions, that defined as follows.

Definition 1. *A solution y of Eq.(1) on interval $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ is called $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- solution, where $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, it, in addition to (3), it satisfies the condition*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

Note that the numbers μ_0, μ_1 determine the signs of any $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solution of Eq. (1) and its derivative in a left neighborhood of ω. In addition, the sign of the second derivative of any $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solution of Eq. (1) in a left neighborhood ω coincides with α_0. Then taking into account (2), we have

$$\alpha_0\mu_1 > 0 \quad \text{as} \quad Y_1 = \pm\infty \quad \text{and} \quad \alpha_0\mu_1 < 0 \quad \text{as} \quad Y_1 = 0. \tag{4}$$

Now we introduce auxiliary functions and notation as follows:

$\Phi(y) = \int\limits_B^y \frac{ds}{sL_0(s)}$, $I_0(t) = \int\limits_{A_0}^t p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}\, d\tau$, $I_1(t) = \int\limits_{A_1}^t p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{-\sigma_1} d\tau$,

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \omega = +\infty, \\ -1 & \text{if} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

THEOREM 1. *Let $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ and let the function $L_0\left(\Phi^{-1}(z)\right)$ is regular varying of γ-th order as $z \to Z$, moreover, let $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$. Besides for $\lambda_0 = 0$ exists (finite or equal to $\pm\infty$) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0} p(t)}{I_1(t)}$. Then, for the existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- solutions of the differential equation Eq.(1), it is necessary and, if the condition*

$$(\sigma_0 + \lambda_0)\left((\sigma_0 + \lambda_0)(1 + \gamma) - \gamma\right) \neq 0$$

is satisfied, sufficient that, along with inequality (2), (4) the conditions

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{|\pi_\omega(t)|^{\sigma_0} p(t)}{I_1(t)} = -\beta, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{\sigma_1}|\lambda_0 - 1|^{\sigma_0} I_0(t) = Z,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} I_1(t)\pi_\omega(t)L_0\left(\Phi^{-1}(\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{\sigma_1}|\lambda_0 - 1|^{\sigma_0} I_0(t))\right) = -\frac{|\lambda_0|^{\sigma_0}}{|\lambda_0 - 1|^{1+\sigma_0}},$$

$$\mu_2 I_0(t) > 0, \quad \alpha_0\mu_1(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{for} \quad t \in]a, \omega[$$

hold.

Moreover, each solution of this kind as $t \uparrow \omega$ admits the asymptotic representations

$$\Phi(y(t)) = \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{\sigma_1}|\lambda_0 - 1|^{\sigma_0} I_0(t)[1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\mu_0\mu_1\beta|\lambda_0|^{\sigma_1}|\lambda_0 - 1|^{\sigma_0} I_1(t)L_0\left(\Phi^{-1}(\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{\sigma_1}|\lambda_0 - 1|^{\sigma_0} I_0(t))\right).$$

Dmytro Leshchenko, Tetiana Kozachenko

Perturbed rotational motions of a rigid body, close to the Lagrange case, under the action of unsteady restoring and perturbation torques

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine
E-mail: leshchenkodmytro@gmail.com, kushpil.t.a@gmail.com

The problem of evolution of the rigid body rotation about a fixed point continues to attract the attention of researchers. In the aspect of applications, the analysis of rotational motion of bodies about a fixed point is important for solving the problems of astronautics, the problems of entry the flying vehicles into the atmosphere and dynamics of the rotating projectile and gyroscopy. A perturbed motions of the rigid body (close to Lagrange's case) have been considered in [1, 2]. Here the appropriate conditions were presented for the possibility of applying the averaging procedure for the equations of motions with respect to the phase of nutation angle, the averaged system of equations was obtained.

We consider the rotation of a dynamically symmetric rigid body about a fixed point under the action of the restoring torque and perturbations depending on the slow time. We set the problem of investigating the asymptotic behavior of the solutions of system for a small parameter; the analysis will be carried out by method of averaging. We receive from the equations of motion for the unperturbed system at parameter $\varepsilon = 0$ the first integrals: G_z is the projection of the angular momentum vector onto vertical axis Oz; H is the total energy of the body; r is the projection of the angular velocity vector onto the axis of dynamical symmetry.

We express the nutation angle θ in case of unperturbed motion as function of the time t , the integrals of motion and arbitrary phase constant β as below

$$\cos\theta = u_1 + (u_2 - u_1)\,\mathrm{sn}\,(\alpha t + \beta)\,, k^2 = (u_2 - u_1)\,/\,(u_3 - u_1)\,,$$

$$\alpha = \sqrt{\mu\,(u_2 - u_1)\,(2A)^{-1}}, 0 \le k^2 \le 1.$$

Here, $\cos\theta$ is the periodic function $(\alpha t + \beta)$ with a period $\frac{K(k)}{\alpha}$; $K\,(k)$ is the complete elliptic integral of the first kind; sn are an elliptic sine, k

is the modulus of the elliptic functions, μ is restoring torque. Assumed that the problem can be decomposed into slowly and quickly changing variables, that one quickly changing variables (θ - the nutation angle) has periodicity, and thus that averaging to can be accomplished with a small error. We propose to carry out the investigation of the perturbed motion in the slow variables $u_i\,(i = 1, 2, 3)$, there are the real roots of cubic polynomial.

Slow variables u_i are connected via G_z, H and r by relations [1], which more convenient for analysis. Averaging the right hand sides of the resultant system over the phase of the nutation angle, we should obtain the averaged system of first approximation:

$$\frac{du_i}{d\tau} = U_i\left(u_1, u_2, u_3, \tau\right), u_i\left(0\right) = u_i^0, i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

$$U_i\left(u_1, u_2, u_3, \tau\right) = \frac{\alpha}{2K\left(k\right)} \int_0^{\frac{2K}{\alpha}} V_i\left(u_1, u_2, u_3, \tau, \theta\left(t\right)\right) dt.$$

As an example,we investigate a perturbed motion, close to Lagrange's case, under the action of an external medium, that slowly changes the viscous properties.The averaged system is integrated numerically for various initial conditions and parameters of the problem. The graphs of the solutions were built. The dependence of the restoring and perturbation torques on the slow time leads to the exhibiting of the set of functions, which smooth out the behaviour of numerical dynamics of $u_i\,(i = 1, 2, 3)$, G_z and H at the stage of numerical integration. Under the influence of external dissipation, body tends to the stable state of lover equilibrium position more rapidly than in cases considered earlier [1, 2] (which follows from the specification of coefficients). New class of rotations of a dynamically symmetric rigid body about a fixed point has been investigated with restoring and perturbation unsteady torques being taken into account.

[1] Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass.* – Cham: Springer; 2017. – 241 p.

[2] Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. *The evolution of motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque.* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2017. – **82**, 2. – P. 79-84.

Vasile Neagu[1], *Galina Vornicescu*[2]

Factorization of piecewise continuous functions in the space $L_p(\Gamma, \rho)$

[1]*Moldova State University*
[2]*Tiraspol State University, Republic of Moldova*
E-mail: vasileneagu45@gmail.com

1. The concept of factorization is widely used in various branches of mathematics. The term "factorization" itself means the representation of a certain mathematical object (number, function, matrix, operator, etc.,) as a product of objects of the same kind, but with certain additional properties. Many mathematical results are actually theorems on the existence and properties of one or another factorization.

2. Let Γ be a closed composite Lyapunov contour which bounds a domain G^+. By G^- we denote the domain which complements $G \cup \Gamma$ to the whole plane. Assume that $0 \in G^+$ and $\infty \in G^-$. Through S, P and Q de note the singular integral operators, defined by the equalities

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma, P = \frac{1}{2}(I + S), \; Q = \frac{1}{2}(I - S).$$

The factorization of function $a \in GL_\infty(\Gamma)$ with respect to contour Γ in the space $L_p(\Gamma, \rho)$ is (see [1]) its representation in the form $a(t) = a_-(t)t^\kappa a_+(t)$, where $\kappa \in Z$ and $a_\pm$ satisfy the following conditions:

1) $a_- \in L_p^-(\Gamma, \rho)$, $a_+ \in L_q^+\left(\Gamma, \rho^{1-q}\right)$, $a_-^{-1} \in L_q^-\left(\Gamma, \rho^{1-q}\right)$, $a_+^{-1} \in L_p^+(\Gamma, \rho)$ $\quad \left(p^{-1} + q^{-1} = 1\right)$;

2) the operator $a_+^{-1} P a_-^{-1} I$ is bounded in the space $L_p(\Gamma, \rho)$.

We remind that $L_q(\Gamma, \rho^{1-q}) = L_p^*(\Gamma, \rho)$. If a function a admits a generalized factorization with respect to contour Γ in the space $L_p(\Gamma, \rho)$, then κ it is determined uniquely. The set of functions $a \in GL_\infty(\Gamma)$ admitting generalized factorization with respect to contour Γ in the space $L_p(\Gamma, \rho)$ will be denoted by $Fact_{p,\rho}(\Gamma)$. Note that the set of all continuous and nonzero functions on Γ admits factorization in all spaces $L_p(\Gamma, \rho)$.

If the function $a \in GL_\infty(\Gamma)$ admits a factorization with respect to contour Γ,

$$a(t) = a_-(t)t^\kappa a_+(t), \quad \kappa \in Z,$$

then [2] for $\kappa \geq 0$ the operator $A = aP + Q$ is invertible to the left, and for $\kappa \leq 0$ it has the inverse operator to the right. In both cases, the operator A^{-1} has the form

$$A^{-1} = (a_+^{-1}P + a_-Q)(t^{-\kappa}P + Q)a_-^{-1}I.$$

However, as it is shown in [2], not every function $a \in GL_\infty(\Gamma)$ admits factorization. For example, the function $a(t) = t^{1/2}$, $(\Gamma = \{t : |t| = 1\})$, does not allow factorization in the space $L_2\left(\Gamma\right)$.

3. Class $R^+L_\infty(\Gamma)$

Denote through $R^+\mathrm{L}_\infty(\Gamma)$ the set of measurable real functions on the contour verifying conditions

$$0 < \operatorname*{essinf}_{t\in\Gamma} a(t),\ \operatorname*{esssup}_{t\in\Gamma} a(t) < \infty.$$

Theorem 1. $R^+L_\infty(\Gamma) \subset Fact_{p,\rho}(\Gamma)$. *If* $a \in R^+L_\infty(\Gamma)$, *then*

$$a(t) = a_-(t)\ \cdot a_+(t),$$

where $a_+(t) = \exp(P\ln a)(t)$, $a_-(t) = \exp(Q\ln a)(t)$. *In addition, the functions* $a_\pm$ *verify the conditions:* $a_+^{\pm 1} \in L_\infty^+(\Gamma)$ *and* $a_-^{\pm 1} \in L_\infty^-(\Gamma)$.

Corollary 1. *Let* $b \in L_\infty\left(\Gamma\right)$ *and* $a \in R^+L_\infty\left(\Gamma\right)$, *then*

$$b \in Fact_{p,\rho}(\Gamma)\ \leftrightarrow ab \in Fact_{p,\rho}(\Gamma).$$

Theorem 2. *Let a function be continuous everywhere on* Γ, *except for a finite number of points* $t_1, t_2, \dots t_n$, *where there exist finite limits* $a\left(t_k \pm 0\right)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ *and* $\inf_{t\in\Gamma}|a(t)| \neq 0$. *If*

$$Im\frac{a\left(t_k + 0\right)}{a\left(t_k - 0\right)} = 0,$$

then the function a *admits factorization in the space* $L_p\left(\Gamma, \rho\right)$.

4. Class $Nt_{p,\rho}(\Gamma)$

We regard measurable essentially boundend functions $a(t)$ as belonging to the Noether class (denoted by $Fact_p(\Gamma)$), if the operator $A = aP + Q$ is Noetheran.

Theorem 3. $Nt_{p,\rho}(\Gamma) = Fact_{p,\rho}(\Gamma)$ *(see [2]).*

[1] Symonenko I.B. *Some general questions of the Riemann boundary value problem* // Izv. Academy of Sciences of USSR, ser. mat. – 1968. – **32**, – P. 1138-1146.

[2] Gohberg I., Krupnik N. *Introduction to the theory of one-dimensional singular integral operators.* – Vol. I. – Basel: Birkhäuse Verlag, 1992. – 232 p.

Igor Nesteruk[1,2], *Anatolii Nikitin*[3], *Bohdan Shepetyuk*[4]

Study of the COVID-19 epidemic dynamics in Ukraine and its regions by methods of probabilistic and statistical analysis of evolutionary models

[1] *Institute of Hydromechanics of National Academy of Sciences of Ukraine,*
[2] *National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine*
E-mail: inesteruk@yahoo.com
[3] *National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine*
E-mail: nikitin2505@gmail.com
[4] *Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine*
E-mail: shepetyukb@gmail.com

A summary of our application No. 2020.01/0028 submitted to the National Research Foundation of Ukraine is given. Unfortunately, the application was rejected without consideration on the merits, but we hope that our plan will be of interest to scientists and other foundations that support pandemic COVID-19 research. The COVID-19 pandemic poses a great threat to Ukraine and the world due to the large number of infected people, high mortality and a very negative impact on the economy. The first studies of the development of the disease in time are just beginning to appear. To do this, various evolutionary models described by differential equations, modeling pulse and diffusion perturbations, Markov switches, etc., [1] can be used. But their suitability for predicting outbreaks of the COVID-19 epidemic requires further study because complex mathematical models contain many unknown parameters, the values of which must be determined using a limited number of observations of the disease over time. Even long-term monitoring of the epidemic may not provide reliable estimates of its parameters due to the constant change of testing conditions, isolation of infected and quarantine. Therefore, simpler approaches should also be used, for example, the known SIR model, which contains only four parameters, the values of which can be estimated using a statistical approach developed and successfully applied in [2, 3]. It allows making adequate predictions of the epidemics duration in different countries, estimating their actual onset (they may precede the time of registration of the first patient), calculate the time dependence of the total number of patients and those spreading the infection [2, 3]. Complex mathematical models contain many unknown parameters, the values of which must be determined using a limited number of observations of the disease over time. Even long-term monitoring of the epidemic may not provide reliable estimates of its parameters due to the constant change of testing conditions, isolation of infected and quarantine. Therefore, the known SIR model will be used, with three differential equations for the evolution of the number of susceptible individuals – S; infected, spreading the infection – I and deleted persons – R, which is the sum of isolated, immunized and deceased persons. This model contains only four parameters, the values of which can be estimated using a statistical approach developed and successfully applied in [2, 3]. The SIR model is unable to determine the duration of the incubation period and predict separately the number of deaths caused by coronavirus, but allows making adequate predictions of the epidemic duration in different countries, estimating their actual onset (they may precede the time of registration of the first patient), calculating the time dependence of the total number of patients $V = I + R$ and I, [2, 3]. This model also allows us to assess the impact of various factors on the disease dynamics. In particular, in [2] it was shown that different testing algorithms significantly influenced the forecast of the epidemic dynamics in Kyiv and Ukraine. For this purpose, only data on the number of confirmed cases for the periods from March 28 to April 10 and from April 11 to April 24, 2020 (before and after the introduction of broader PCR testing) were used. Similar approaches can be used for other regions of Ukraine. Constant analysis of the number of cases and comparison with theoretical curves will allow timely detection of new epidemic outbreaks.

[1] Samoilenko I.V., Nikitin A.V. *Double merging of phase space for differential equations with small stochastic supplements under Levy and Poisson approximation conditions* // Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series. – 2020. – **Vol. 47**, No. 1. – P. 141-157.

[2] Nesteruk I. *Simulations and predictions of COVID-19 pandemic with the use of SIR model* // Innov. Biosyst. Bioeng. – 2020. – **Vol. 4**, No. 2. – P. 110-121. DOI: 10.20535/ibb.2020.4.2.204274, http://ibb.kpi.ua/article/view/204274.

[3] Nesteruk I. *Waves of COVID-19 pandemic. Detection and SIR simulations* // MEDRXIV [Preprint]. – 2020. – 24 p. DOI: 10.1101/2020.08.03.20167098, https://www.medrxiv.org/content/10.1101/2020.08.03.20167098v1.

Andrei Perjan, Galina Rusu

Abstract second order differential equations with two small parameters and lipschitzian nonlinearities

Moldova State University
E-mail: aperjan1248@gmail.com, rusugalinamoldova@gmail.com

Let H be a real Hilbert space endowed with the scalar product $(\cdot,\cdot)$ and the norm $|\cdot|$, and V be a real Hilbert space endowed with the norm $||\cdot||$. Let $A : V \subset H \to H$, be a linear self-adjoint operator and B is nonlinear $A^{1/2}$ lipschitzian opeartor.

Consider the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} \varepsilon u''_{\varepsilon\delta}(t) + \delta\, u'_{\varepsilon\delta}(t) + Au_{\varepsilon\delta}(t) + B\big(u_{\varepsilon\delta}(t)\big) = f(t), \quad t \in (0,T), \\ u_{\varepsilon\delta}(0) = u_0, \quad u'_{\varepsilon\delta}(0) = u_1, \end{cases} \qquad (P_{\varepsilon\delta})$$

where $u_0, u_1, f : [0,T] \to H$ and ε, δ are two small parameters. We investigate the behavior of solutions $u_{\varepsilon\delta}$ to the problem $(P_{\varepsilon\delta})$ in two different cases:
(i) $\varepsilon \to 0$ and $\delta \geq \delta_0 > 0$, relative to the solutions to the following unperturbed system:

$$\begin{cases} \delta l'_{\delta}(t) + Al_{\delta}(t) + B\big(l_{\delta}(t)\big) = f(t), \quad t \in (0,T), \\ l_{\delta}(0) = u_0; \end{cases} \qquad (P_{\delta})$$

(ii) $\varepsilon \to 0$ and $\delta \to 0$, relative to the solutions to the following unperturbed system:

$$Av(t) + B\big(v(t)\big) = f(t), \quad t \in [0,T), \qquad (P_0)$$

The framework of our study is determined by the following conditions:
(HA) *$V \subset H$ densely and continuously, i. e. $|u|^2 \leq ø_0 ||u||^2, \forall u \in V$. The operator $A : V \subset H \to H$ is linear, self-adjoint and positive definite, i.e. there exists $\omega > 0$ such that $(Au,u) \geq \omega\, |u|^2, \quad \forall u \in V$;*
(HB) *The operator $B : D(B) \subseteq H \mapsto H$ is $A^{1/2}$ lipschitzian, i. e. $D(A^{1/2}) \subset D(B)$ and there exists $L > 0$*

$$|B(u) - B(v)| \leq L\, |A^{1/2}(u-v)|, \quad \forall u, v \in D(A^{1/2}).$$

Using theorems of existence and uniqueness of solutions to the problems $(P_{\varepsilon\delta})$, (P_δ), *a priori* estimates of these solutions and a relationship between solutions to the problem for the abstract linear second order differential equation and the corresponding solution to the problem for the first order equation [1], we establish convergence estimates from the following two theorems.

THEOREM 1. *Let $T > 0$ and $p > 1$. Let us assume that the operators A and B satisfy conditions* **(HA)** *and* **(HB)**. *Let $\delta \geq \delta_0 > 0$. If $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(A^{1/2})$ and $f \in W^{1,p}(0,T;H)$, then there exists constant $C = C(T,p,\omega,L\delta_0) > 0$ and $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_0, L)$, such that*

$$||u_{\varepsilon\delta} - l_\delta||_{C([0,T];H)} \leq C\,\mathcal{M}\,e^{\beta}, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \quad \beta = min\Big\{\frac{1}{4}, \frac{p-1}{2p}\Big\},$$

where $u_{\varepsilon\delta}$ abd l_δ are strong solutions to the problems $(P_{\varepsilon\delta})$ and (P_δ), respectively,

$$\mathcal{M} = |Au_0| + |A^{1/2}u_1| + |B(0)| + ||f||_{W^{1,p}(0,T;H)}.$$

THEOREM 2. *Let $T > 0$ and $p > 1$. Let us assume that the operators A and B satisfy conditions* **(HA)**, **(HB)** *and $L < \sqrt{\o}$. If $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(A^{1/2})$ and $f \in W^{1,p}(0,T;H)$, then there exists constant $C = C(T,p,\omega,L) > 0$, such that*

$$||u_{\varepsilon\delta} - v||_{C([0,T];H)} \leq$$

$$\leq h_0\,e^{-\o_0 t/\delta} + C\,\mathcal{M}\left[\delta^{-1}\Theta(\varepsilon,\delta) + \delta^{(p-1)/p}\right], \quad t \in [0,T],$$

$\delta \in (0,1]$, $\varepsilon \in \big(0, \mu_0\,\delta^2\big)$, $\o_0 = \sqrt{\o}(\sqrt{\o} - L)$, $h_0 = \big|u_0 - (A+B)^{-1}f(0)\big|$, $\mu_0 = \frac{\sqrt{\o}-L}{2\sqrt{\o}\,L^2}$, $u_{\varepsilon\delta}$ and v are strong solutions to the problems $(P_{\varepsilon\delta})$ and (P_0), respectively, and

$$\Theta(\varepsilon,\delta) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^{1/4}}{\delta^{(p+1)/p}} & if \quad p \geq 2, \\[2ex] \dfrac{\varepsilon^{(p-1)/2p}}{\delta^{3/2}} & if \quad p \in (1,2). \end{cases}$$

[1] A. Perjan, Linear singular perturbations of hyperbolic-parabolic type, *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat.*, 2003, No. 2(42), 95–112.

Mykhaylo Petryk[1], *Igor Boyko*[1], *Mykola Shynkaryk*[2], *Oksana Petryk*[1]

Mathematical modeling of nonlinear competitive adsorption and diffusion of gases in nanoporous particles media

[1] *Tenopil Ivan Puluj National Technical University, Ternopil, Ukraine*
E-mail: mykhaylo_petryk@tntu.edu.ua
[2] *Tenopil National Economical University, Ternopil, Ukraine*
E-mail: shmi@tneu.edu.ua

Based on the physical hypotheses and justifications of multicomponent mass heat transfer in the nanoporous particles media obtained in papers [1, 2], a competitive adsorption model were developed:

$$\frac{\partial C_s(t,Z)}{\partial t} = \frac{D_{inter_s}}{l^2}\frac{\partial^2 C_s}{\partial Z^2} - e_{\text{inter}}\tilde{K}_s\frac{D_{intra_s}}{R^2}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial X}\right)_{X=1}, \qquad (1)$$

$$-H\frac{\partial T(t,z)}{\partial t} - uh_g\frac{\partial T}{\partial z} - \sum_{s=1}^{m}\Delta\bar{H}_s\frac{\partial \bar{Q}_s}{\partial t} - 2\frac{\alpha_h}{R_{column}}T + \Lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_s(t,X,Z)}{4t} = \frac{D_{intra_s}}{R^2}\left(\frac{\partial^2 Q_s}{\partial X^2} + \frac{2}{X}\frac{\partial Q_s}{\partial X}\right) \qquad (3)$$

with initial conditions:

$$C_s(t=0,Z) = 0;\ Q_s(t=0,X,Z) = 0;\ (Z,X) \in (0,1),\ s = \overline{1,m} \qquad (4)$$

and boundary conditions for coordinate X of the crystallite and Langmuir's equilibrium:

$$\frac{\partial}{\partial X}Q_s(t,X=0,Z) = 0,$$

$$Q_s(t,X=1,Z) = \frac{K_s(T)\,C_s(t,Z)}{1+\sum\limits_{s_1=1}^{m}K_{s_1}(T)\,C_{s_1}(t,Z)}, s = \overline{1,m}. \qquad (5)$$

The boundary and interface conditions for coordinate Z are:

$$C_s\left(t,1\right)=1,\ \frac{\partial C_s}{\partial Z}\left(t,Z=0\right)=0,\ t>0, \tag{6}$$

$$T(t,Z)|_{Z=1}=T_{initial},\ \frac{\partial}{\partial z}T(t,Z)|_{Z=0}=0 \tag{7}$$

were $K_s\left(T\right)=k_{0s}\exp\left(-\Delta H_s/R_gT\right)$.

The non-isothermal model (1) - (7) is decomposed into a system of linearized boundary value problems using the Landau decomposition approach of non-isothermal Langmuir competitive adsorption equilibrium to a convergent series at the phase transition at temperature point as a small parameter. High-speed analytical solutions of linearized problems that allow calculation parallelization using Heaviside operational method are constructed.

[1] 1. Petryk M., Ivanchov N., Leclerc S., Canet D., Fraissard J. *Competitive adsorption and diffusion of gases in a microporous solid.* – London: IntechOpen, 2019. – Pages 1320.

[2] 2. Petryk M., Khimitch A., Petryk M.M. *Simulation of Adsorption and Desorption of Hydrocarbons in Nanoporous Catalysts of Neutralization Systems of Exhaust Gases Using Nonlinear Langmuir Isotherm* // Journal of Automation and Information Sciences. – 2018. – **50**, 10. – P. 18–33.

Yehuda Pinchover

On families of optimal Hardy-weights for linear second-order elliptic operators

Department of Mathematics
Technion - Israel Institute of Technology
Haifa, Israel
e-mail: pincho@technion.ac.il

We construct families of optimal Hardy-weights for a subcritical linear second-order elliptic operator using a one-dimensional reduction. More precisely, we first characterize all optimal Hardy-weights with respect to one-dimensional subcritical Sturm-Liouville operators on (a, b), $\infty \leq a < b \leq \infty$, and then apply this result to obtain families of optimal Hardy inequalities for general linear second-order elliptic operators in higher dimensions.

This is a joint work with Idan Versano [1].

[1] Y. Pinchover, and I. Versano, *On families of optimal Hardy-weights for linear second-order elliptic operators*, J. Funct. Anal. 278 (2020), 108428.

M. N. Popa[1], *V. V. Pricop*[2]

About an algebraic vision on the center and focus problem

[1]*„Vladimir Andrunachievici" Institute of Mathematics and Computer Science, Republic of Moldova*
E-mail: mihailpomd@gmail.com
[2]*„Ion Creangă" State Pedagogical University from Chişinău, Republic of Moldova*
E-mail: pricopvv@gmail.com

Consider a two-dimensional autonomous polynomial system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} P_{m_i}(x,y),\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} Q_{m_i}(x,y)\,(\ell < \infty), \tag{1}$$

where P_{m_i} and Q_{m_i} are homogeneous polynomials of degree m_i in x and y, and $1 = m_0 < m_1 < ... < m_\ell$. The coefficients and variables of this system take values from the fields of real numbers $\mathbb{R}$.

We denote by

$$L_1,\, L_2, ...,\, L_k, ..., \tag{2}$$

polynomials in the coefficient of system (1), which are the focus quantities [1] of this system which has a singular point of the second group (center or focus) at the origin of coordinates.

It is known that in sequence (3) there is always a finite number ω of these polynomials, called the essential conditions of center, the equality to zero of which annuls entire sequence (3).

The main problem of center and focus is in determining this number ω for any system of differential equations (1).

The main obtained result is the following:

Let $N = \sum\limits_{i=0}^{\ell}(m_i + 1)\,(\ell < \infty)$ be the maximal possible number of nonzero coefficients of system (1). Then the number of algebraically independent focus quantities from (3) does not exceed $N - 1$, which is the Krull dimension of Sibirsky algebra of comitants [1] for system (1). It is also shown that this number can be reduced to $N - 3$, which is the Krull dimension of Sibirsky algebra of invariants [1] for the mentioned system. It is assumed that the number of essential focus quantities ω indicated above does not exceed $N-1$ and it can be improved up to $N-3$, and their construction will begin with the first algebraically independent nonzero focus quantities obtained consecutively up to the mentioned estimations.

[1] M. N. Popa, V. V. Pricop. *The Center and Focus Problem: algebraic solutions and hypotheses*. Academy of Sciences of Moldova, Chişinău, 2018. – 255 p. http://www.math.md/files/download/publications/monographs/PopaM_PricopV_PCF_VEl.pdf.

Nataliya Protsakh

On the inverse problem for semilinear Eidelman type equation

Ukrainian National Forestry University, L'viv, Ukraine
E-mail: protsakh@ukr.net

Let $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^k$ and $\mathcal{D}_y \subset \mathbb{R}^l$ be bounded domains with boundaries $\partial\mathcal{D}_x$, $\partial\mathcal{D}_y$. Denote: $\Omega = \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$, $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, where $\tau \in (0,T]$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $x \in \mathcal{D}_x$, $y \in \mathcal{D}_y$, $z = (x,y) \in \Omega$, $n = k + l$, ν is the outward unit normal vector to $\partial\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y \times (0,T)$.

In the domain Q_T we study the following inverse problem: find the sufficient conditions of the existence and the uniqueness of a pair of functions $(u(z,t),\ q(t))$ that satisfies the equation

$$u_t + \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j})_{x_ix_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(z,t)u_{z_i})_{z_j} +$$
$$+c(z,t)u + g(z,t,u) = f_1(z,t)q(t) + f_0(z,t), \tag{1}$$

the initial, boundary and overdetermination conditions

$$u(z,0) = u_0(z), \quad z \in \Omega, \tag{2}$$

$$u|_{S_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y \times (0,T)} = 0, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} K(z)u(z,t)\,dz = E(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

in the sense of definition:

A pair of functions $(u(z,t), q(t))$ is a weak solution to the problem (1)–(4), if $u \in L^2(0,T;V_1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(Q_T)$, $q \in C([0,T])$, it satisfies the equality

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_t v + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j}v_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)u_{z_i}v_{z_j} +$$
$$+c(z,t)uv + g(z,t,u)v\Big)\,dz\,dt = \int\limits_{Q_\tau} (f_1(z,t)q(t) + f_0(z,t))v\,dz\,dt \tag{5}$$

for all $\tau \in (0,T]$, and all functions $v \in L^2(0,T;V_1(\Omega))$, and the conditions (3), (4) hold.

Here $V_1(\Omega) = \{u : u \in H_0^1(\Omega), u_{x_i x_j} \in L^2(\Omega), i,j \in \{1,\dots,k\}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y} = 0\}$.

Let the coefficients of equation (1) and the initial data satisfy conditions:

1): $a_{ij} \in C([0,T];L^\infty(\Omega))$, $a_{ij,t} \in L^\infty(Q_T)$,
$a_{ij}(z,t) \geq a_0 > 0$ for almost all $(z,t) \in Q_T,\ i,j \in \{1,\dots,k\}$;

2): $b_{ij} \in C([0,T];L^\infty(\Omega))$, $b_{ij,t} \in L^\infty(Q_T),\ \ i,j \in \{1,\dots,n\}$;
$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \geq b_0|\xi|^2 \text{ for all } \xi \in \mathbb{R}^n$$
and for almost all $(z,t) \in Q_T,\ b_0 > 0$;

3): $c \in C([0,T];L^\infty(\Omega)),\ c(z,t) \geq c_0$ for almost all $(z,t) \in Q_T$, where c_0 is a constant;

4): $g(z,t,\xi)$ is measurable with respect to (z,t) in Q_T for all $\xi \in \mathbb{R}^1$ and is continuous with respect to ξ for almost all $(z,t) \in Q_T$, there exists $g_0 > 0$, such that $|g(z,t,\xi) - g(z,t,\eta)| \leq g_0|\xi - \eta|$ for almost all $(z,t) \in Q_T$ and all $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}^1$;

5): $f_0,\ f_1 \in C([0,T];L^2(\Omega))$;

6): $u_0 \in V_1(\Omega);\ K \in V_1(\Omega);\ E \in H^1(0,T),\ E(0) = \int\limits_{\Omega} K(z)u_0(z)\,dz.$

With the use of Faedo-Galerkin method and the method of successive approximations we have proved the theorem

Theorem 1. Let the conditions 1)-6) hold and $\int\limits_{\Omega} K(z)f_1(z,t)dz \neq 0$ for all $t \in [0,T]$. Then there exists a unique weak solution to the problem (1)–(4) in the domain Q_T.

Vadim Repeşco

The canonical form of all cuartic systems with maximal multiplicity of the line at the infinity

Tiraspol State University, Chişinău, Moldova
E-mail: repescov@gmail.com, repescov@ust.md

Consider the generic cuartic differential system

$$\begin{cases} \dot{x} = P\left(x, y\right), \\ \dot{y} = Q\left(x, y\right), \end{cases} \tag{1}$$

where $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$, $\max\left\{\deg P, \deg Q\right\} = 4$, $\mathrm{GCD}\left(P, Q\right) = 1$. According to [1], if a polynomial differential system has enough invariant straight lines considered with their multiplicities, then we can construct a Darboux first integral. Moreover, the number of the invariant straight lines with their multiplicities affects the existence of the limit cycles [3], the center problem [2] and other qualitative properties of a polynomial differential system [4]. If $yP_4 - xQ_4 \not\equiv 0$, where P_4 and Q_4 are homogeneous polynomials of degree 4, then the system (1) has at the infinity an invariant straight line of the multiplicity at least one. We know that that the multiplicity of this invariant straight line is at most 10, according to [5]. In this work, algebraically, we obtain two systems with these properties, which, via affine transformations and time rescaling, were brought to the form (2).

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + ay^4, \\ \dot{y} = y. \end{cases} \tag{2}$$

Therefore, we can state the following theorem.

Теорема 1. *Suppose that a cuartic differential system has an invariant straight line at the infinity of maximal multiplicity. Then via an affine transformation and time rescaling this system can be brought to the system* (2).

[1] LLIBRE J., XIANG Z., *On the Darboux Integrability of Polynomial Differential Systems*. Qual. Theory Dyn. Syst., 2012.

[2] ŞUBĂ A., COZMA D., *Solution of the problem of the center for cubic system with two homogeneous and one nonhomogeneous invariant straight lines.* In: Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. 1999, no. 1, p. 37–44, 135, 137–138.

[3] GUANGJIAN S., JIFANG S., *The n-degree di§erential system with (n1)(n+1)=2 straight line solutions has no limit cycles*, Proc. of Ordinary Differential Equations and Control Theory, Wuhan, 1987, 216220.

[4] LLIBRE J., MAHDI A., VULPE N. *Phase portraits and invariant straight lines of cubic polynomial vector fields having a quadratic rational first integral.* In: Rocky Mountain J. Math. 41 (2011), no. 5, p. 1585–1629.

[5] VACARAŞ O., *Maximal multiplicity of the line at infinity for quartic differential systems.* Acta et commentationes (Ştiinţe Exacte şi ale Naturii), 6 (2), 2018, p 70-77.

Evgeny Sevost'yanov[1], *Sergei Skvortsov*[2], *Nataliya Ilkevych*[3]

On equicontinuity of inverse mappings on the boundary in terms of prime ends

[1]*Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine;*
Institute of Applied Mathematics and Mechanics
of NAS of Ukraine, Slavyansk, Ukraine
E-mail: esevostyanov2009@gmail.com
[2]*Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine*
E-mail: serezha.skv@gmail.com
[3]*Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine*
E-mail: ilkevych1980@gmail.com

In the following, the following notation is used: the set of prime ends corresponding to the domain D, is denoted by E_D, and the completion of the domain D by its prime ends is denoted $\overline{D}_P$. We say that the boundary of the domain D in $\mathbb{R}^n$ is *locally quasiconformal*, if each point $x_0 \in \partial D$ has a neighborhood U in $\mathbb{R}^n$, which can be mapped by a quasiconformal mapping φ onto the unit ball $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ so that $\varphi(\partial D \cap U)$ is the intersection of $\mathbb{B}^n$ with the coordinate hyperplane. For a given set $E \subset \mathbb{R}^n$, we set $d(E) := \sup\limits_{x,y\in E} |x-y|$. We say that a bounded domain D in $\mathbb{R}^n$ is *regular*, if D can be quasiconformally mapped to a domain with a locally quasiconformal boundary whose closure is a compact in $\mathbb{R}^n$. If $g : D_0 \to D$ is a quasiconformal mapping of a domain D_0 with a locally quasiconformal boundary onto some domain D, then for $x, y \in \overline{D}_P$ we put:

$$\rho(x,y) := |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|\,, \tag{1}$$

where the element $g^{-1}(x)$, $x \in E_D$, is to be understood as some (single) boundary point of the domain D_0. It is easy to verify that ρ in (5) is a metric on $\overline{D}_P$, and that the topology on $\overline{D}_P$, defined by such a method, does not depend on the choice of the map g with the indicated property.

Let $x_0 \in \overline{D}$, $x_0 \neq \infty$,

$$S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| = r\}\,, S_i = S(x_0,r_i)\,, \quad i = 1,2\,,$$

$$A = A(x_0,r_1,r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x-x_0| < r_2\}\,.$$

Let $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ be a Lebesgue measurable function satisfying the condition $Q(x)\equiv 0$ for $x\in\mathbb{R}^n\setminus D$. The mapping $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ is called a *ring Q-mapping at the point* $x_0\in\overline{D}\setminus\{\infty\}$, if the condition

$$M(f(\Gamma(S_1,S_2,D)))\leqslant\int\limits_{A\cap D}Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x)\qquad(2)$$

holds for all $0<r_1<r_2<d_0:=\sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$ and all Lebesgue measurable functions $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ such that $\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)dr\geqslant 1$. Let (X,d) and (X',d') be metric spaces with distances d and d', respectively. A family $\mathfrak{G}$ of mappings $g:X'\to X$ is said to be *equicontinuous at a point* $y_0\in X'$, if for every $\varepsilon>0$ there is $\delta=\delta(\varepsilon,y_0)>0$ such that $d(g(y),g(y_0))<\varepsilon$ for all $g\in\mathfrak{G}$ and $y\in X'$ with $d'(y,y_0)<\delta$. The family $\mathfrak{G}$ is *equicontinuous* if $\mathfrak{G}$ is equicontinuous at every point $y_0\in X'$.

Everywhere below, unless otherwise stated, $d=\rho$ is one of the metrics in $\overline{D}_P$, defined by the relation (5), and $d'=q$ is a chordal metric defined by formula $q(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}$ for $x\ne\infty\ne y$, and $q(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}$. For a given set $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$, we set $q(E):=\sup\limits_{x,y\in E}q(x,y)$. The quantity $q(E)$ is called the *chordal diameter* of the set E. The boundary of the domain D is called *weakly flat at the point* x_0, if for every number $P>0$ and for every neighborhood U of this point there is a neighborhood V of point x_0 such that $M(\Gamma(E,F,D))>P$ for arbitrary continua E and F, satisfying conditions $F\cap\partial U\ne\varnothing\ne F\cap\partial V$. The boundary of domain D is called *weakly flat* if it is such at each point of its boundary.

For a given number $\delta>0$, domains $D\subset\mathbb{R}^n$ and $D'\subset\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\geqslant 2$, a continuum $A\subset D$ and a Lebesgue measurable function $Q(x):\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ such that $Q(x)\equiv 0$ for $x\notin D$, we denote by $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ the family of all homeomorphisms h of D' onto D such that the mapping $f=h^{-1}$ satisfies the condition (2) in $\overline{D}$, while $q(f(A))\geqslant\delta$. The following statement is true.

THEOREM 1. *Suppose that D is regular, D' has a weakly flat boundary, and any component of $\partial D'$ is a non-degenerate continuum. If $Q\in L^1(D)$, then each map $h\in\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ extends by continuity to the map $\overline{h}:\overline{D'}\to\overline{D}_P$, in addition, $\overline{h}(D')=\overline{D}_P$, and the family $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}_P,\overline{D'})$, consisting of all extended mappings $\overline{h}:\overline{D'}\to\overline{D}_P$, is equicontinuous in $\overline{D'}$.*

Maria Shan

Removability result for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term

Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine
E-mail: shan_maria@ukr.net

In this paper we consider solutions to the quasilinear parabolic equation in the divergent form

$$u_t - divA(x,t,u,\nabla u) + g(x,t,\nabla u) = b(x,t,u,\nabla u),\ (x,t) \in \Omega_T \qquad (1)$$

where $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, Ω is a bounded domain in $R^n, n \geq 2, 0 < T < +\infty, 0 \in \Omega$, satisfying the initial condition

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega \setminus \{0\}. \qquad (2)$$

We suppose that the functions $A, g, b : \Omega \times R^1_+ \times R^1 \times R^n \to R^n$ and such that $A(\cdot,\cdot,u,\xi)$, $g(\cdot,\cdot,\xi)$, $b(\cdot,\cdot,u,\xi)$ are Lebesque measurable for all $u \in R^1, \xi \in R^n$, and $A(x,t,\cdot,\cdot)$, $g(x,t,\cdot)$, $b(x,t,\cdot,\cdot)$ are continuous for almost all $(x,t) \in \Omega_T$, $A = (a_1, a_2, ...a_n)$. We also assume that the following structure conditions are satisfied

$$\begin{gathered} A(x,t,u,\xi)\xi \geq \nu_1 \sum_{i=1}^{n} |u|^{m_i-1}|\xi_i|^2, \\ |a_i(x,t,u,\xi)| \leq \nu_2 |u|^{m_i-1}|\xi_i|^2;\ g(x,t,\xi) \geq \nu_1 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{q_i},\ i=\overline{1,n}, \\ |b(x,t,u,\xi)| \leq \nu_2 |u|^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |u|^{m_i-1}|\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{gathered} \qquad (3)$$

where ν_1, ν_2 are positive constants and

$$1 - \frac{2}{n} < m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n < m + \frac{1}{n},\ m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i, \qquad (4)$$

$$\frac{2+nm}{1+n} \leq q < 2, \quad \max_{0 \leq i \leq n} q_i < q\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}. \qquad (5)$$

Before formulation the main results, let us formulate the definition of a weak solution to the problem (1), (2). We say that $u \in L^{\overline{q}}(0,T;W^{1,\overline{q}}(\Omega))$ if $\iint\limits_{\Omega_T} |u|^q dxdt + \sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_T} |u_{x_i}|^{q_i} dxdt < \infty$. Let $m^- = \min(1, m_1)$, we also say that $u \in V_m(\Omega_T)$ if $u \in C(0,T;L^{1+m^-}(\Omega))$ and $\sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_T} |u|^{m_i+m^- -2}|u_{x_i}|^2$ $dxdt < \infty$. By a weak solution of the problem (1), (2) we mean the function $u(x,t) \geq 0$ satisfying the inclusion $u\psi \in V_m(\Omega_T) \cap L^{\overline{q}}(0,T;W^{1,\overline{q}}(\Omega)) \cap L^{\infty}(\Omega_T)$ and the integral identity

$$\int\limits_{\Omega} u(x,t)\psi\,\varphi\,dx + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{\Omega} (-u(\psi\phi)_t + A(x,t,u,\nabla u)\nabla(\psi\varphi) + \\ + g(x,t,\nabla u)\psi\varphi - b(x,t,u,\nabla u)\psi\,\varphi\,)\,dxdt = 0, \tag{6}$$

holds true for $p = \max(2+m_n, \max\limits_{1\leq i\leq n} q_i)$, for any $0 < \tau < T$, any testing function $\varphi \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\overset{o}{W}{}^{1,2}(\Omega))$ and any $\psi \in C^1(\overline{\Omega}_T)$ vanishing in a neighborhood of $\{(0,0)\}$.

Our main result reads as follows

Theorem 1. *Let u be a weak solution to the problem (1), (2). Let that the conditions (3)-(5) be fulfilled, and assume also that if $q = \frac{2+nm}{1+n}$ then $q_i = \frac{2+nm}{1+n+\frac{n}{2}(m-m_i)}$, $i = \overline{1,n}$. Then the singularity at the point $\{(0,0)\}$ is removable, that is the integral identity (6) holds for $\psi \equiv 1$.*

Acknowledgments.

This paper is supported by Ministry of Education and Science of Ukraine, grant number is 0118U003138.

[1] Shan M. A., Skrypnik I. I. Keller-Osserman estimates and removability result for the anisotropic porous medium equation with gradient absorption term // Mathematische Nachrichten. — 2019. — Vol. 292. — P. 436—453.

Andrii Sizhuk[1], *Guangjiong Dong*[2]

The representation of the system of non-linear integral-differential equations through the specific directed graphs in the scaling grid

[1] *Department of Radiophysics, Kyiv National Taras Shevchenko University, Acad. Glushkova Avenue 4-g, Kyiv, Ukraine 03022*
E-mail: andrii.sizhuk@gmail.com
[2] *Physics Department, East China Normal University, Shanghai, China, 200062*

The structure of the solution for the following non-linear integral-differential Maxwell-Bloch-like system of equations is discussed (see details in [1]).

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\rho_{aa}(t,\mathbf{r}) = \lambda_a\frac{n(\mathbf{r})}{N} - \gamma\rho_{aa}(t,\mathbf{r})\\ &+\frac{i}{\hbar}\wp\left(\rho_{ba}(t,\mathbf{r})\,\hat{\wp}\cdot\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) - \rho_{ab}(t,\mathbf{r})\,\hat{\wp}\cdot\mathbf{E}^*(t,\mathbf{r})\right)\\ &+\frac{2}{\hbar}\chi\int d\mathbf{r}'\left\{2Im\left(\rho_{ba}(t,\mathbf{r})\right)Re\left(\rho_{ba}(t,\mathbf{r}')\right)Q\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)\right\};\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\rho_{bb}(t,\mathbf{r}) = \lambda_b\frac{n(\mathbf{r})}{N} - \gamma\rho_{bb}(t,\mathbf{r})\\ &-\frac{i}{\hbar}\wp\left(\rho_{ba}(t,\mathbf{r})\,\hat{\wp}\cdot\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) - \rho_{ab}(t,\mathbf{r})\,\hat{\wp}\cdot\mathbf{E}^*(t,\mathbf{r})\right)\\ &-\frac{2}{\hbar}\chi\int d\mathbf{r}'\left\{2Im\left(\rho_{ba}(t,\mathbf{r})\right)Re\left(\rho_{ba}(t,\mathbf{r}')\right)Q\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)\right\};\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\rho_{ba}(t,\mathbf{r}) = -\gamma_{ba}\rho_{ba}(t,\mathbf{r}) + i\varpi_0\rho_{ba}(t,\mathbf{r})\\ &+\frac{i}{\hbar}\left(\rho_{aa}(t,\mathbf{r}) - \rho_{bb}(t,\mathbf{r})\right)\wp\hat{\wp}\cdot\mathbf{E}^*(t,\mathbf{r})\\ &-\frac{2i}{\hbar}\chi\int d\mathbf{r}'\left\{\left(\rho_{aa}(t,\mathbf{r}) - \rho_{bb}(t,\mathbf{r})\right)Re\left(\rho_{ba}\left(t,\mathbf{r}'\right)\right)Q\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)\right\};\end{aligned}\tag{3}$$

where $\rho_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})$ for $\alpha \in \{a,b\}$ and $\beta \in \{a,b\}$ is the unknown function of the time t and coordinates $\mathbf{r}$; $\mathbf{E}(t,\mathbf{r})$ is the known periodic function of time and coordinates. The solution is supposed to be localized in the volume V.

$$Q\left(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}\right)=\frac{\hat{\wp}\cdot\hat{\wp}^{'}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{3}}-3\frac{\left(\hat{\wp}\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^{'}\right)\right)\left(\hat{\wp}^{'}\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}^{'}\right)\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{5}}; \tag{4}$$

$n(\mathbf{r}) = N\left(\rho_{aa}\left(t,\mathbf{r}\right)+\rho_{bb}\left(t,\mathbf{r}\right)\right)$ with N being the given positive quite large integer number. Other symbols are the given parameters.

The term "process"is introduced to represent the structure of the solution of the system of equations by means of the corresponding differential equations as the additive processes (components of the solution: see details in [2]). The representation of the system of non-linear integral-differential equations through the specific directed graphs in the scaling grid is proposed. The interaction between the different processes is represented through the interaction integral and was illustrated by the specific system of directed graphs. In accordance with the introduced systems of differential equations, the structure of the solution is illustrated in the grid, where the dependence of a term $\rho_{\alpha\beta}\left(t,\mathbf{r}\right)$ on a the other induced processes is shown by the dashed arrows, joining the processes that generate the term. The type of interaction that involves the generating processes is shown to the left of the grid (left ordinate), while the types of the processes are cited at the right side of the grid (right ordinate). Each induced term is depicted by the horizontal vector. The circle with the enclosed directed arrow depicts the non-linear coupling caused between the processes and measured by the introduced interaction integral. The semicircle depicts the linear coupling with a parametric field (media). In principle, the directions and lengths of the vectors can be defining their contribution (addition or subtraction). For this purpose, a scaling map for the corresponding differential rates has to be developed depending on the ordinates (processes and the type of interaction).

[1] Andrii Sizhuk, Guangjiong Dong, *The Near Resonant Optical Absorption by System Coupled with Two Laser Beams*, Ukrainian Journal of Physics **65**(4), 277 - 283 (2020).

[2] A. S. Sizhuk and P. R. Hemmer, Journal of Statistical Physics **147**, 132 (2012). DOI https://doi.org/10.1007/s10955-012-0457-2.

Iryna Skira

Problem without initial condition for strongly nonlinear variational inequalities

Ivan Franko National University, Lviv, Ukraine
E-mail: irusichka.skira@gmail.com

Let $S := (-\infty, 0]$, V be real separable reflexive Banach space with norm $\|\cdot\|$, and H be real Hilbert space with the scalar products $(\cdot,\cdot)$ and norms $|\cdot|$, respectively. Suppose that $V \subset H$ with dense, continuous and compact injection. Denote by V' and H' the dual spaces to V and H, respectively. We suppose that the space H' is a subspace of V'. Identifying the spaces H and H' by the Riesz-Fréchet representation theorem, we obtain dense and continuous embeddings $V \subset H \subset V'$.

Let X be an arbitrary Banach space with the norm $\|\cdot\|_X$. Let $q \in [1, \infty]$, q' is a dual to q, that is, $1/q + 1/q' = 1$. Denote by $L^q_{\mathrm{loc}}(S; X)$ the linear space of measurable functions defined on S with values in X, whose restrictions to any segment $[t_1, t_2] \subset S$ belong to the space $L^q(t_1, t_2; X)$. Let us define the spaces

$$H^1_{\mathrm{loc}}(S; H) := \{w \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H) \,|\, w' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)\},$$

$$W^1_{q,\mathrm{loc}}(S; V) := \{w \in L^q_{\mathrm{loc}}(S; V) \,|\, w' \in L^{q'}_{\mathrm{loc}}(S; V')\}, \quad q > 1. \quad (1)$$

Let $\Phi : V \to (-\infty, +\infty]$ be a proper, convex and lower semicontinuous functional; moreover, $\Phi(0) = 0$. A *subdifferential* of functional Φ is a mapping $\partial\Phi : V \to 2^{V'}$, defined as follows

$$\partial\Phi(v) := \{v^* \in V' \mid \Phi(w) \geq \Phi(v) + (v^*, w - v) \quad \forall\, w \in V\}, \quad v \in V,$$

and the *domain* of the subdifferential $\partial\Phi$ is the set $D(\partial\Phi) := \{v \in V \,|\, \partial\Phi(v) \neq \emptyset\}$.

Assume that $B(t, \cdot) : H \to H,\ t \in S$, is a given family of operators which satisfy the condition: for any $v \in H$ the mapping $B(\cdot, v) : S \to H$ is measurable, and there exists a constant $L \geqslant 0$ such that following inequality holds

$$|B(t, v_1) - B(t, v_2)| \leqslant L|v_1 - v_2| \quad (2)$$

for a.e. $t \in S$, and for all $v_1, v_2 \in H$; in addition, $B(t,0) = 0$ for a.e. $t \in S$.

Let us consider the evolutionary variational inequality or, other words, subdifferential inclusion

$$u'(t) + \partial\Phi\big(u(t)\big) + B(t, u(t)) \ni f(t), \quad t \in S, \tag{3}$$

where $f : S \to V'$ is given function.

Definition. *Let $p > 2$, $q > 2$ be given constants and $f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S; V') + L^{q'}_{\mathrm{loc}}(S; H)$. The* solution *of variational inequality* (3) *is a function $u : S \to V$ that satisfies the following conditions:*

1) $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(S; V) \cap L^q_{\mathrm{loc}}(S; H)$;

2) $u(t) \in D(\partial\Phi)$ *for a.e.* $t \in S$;

3) *there exists a function $g \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S; V') + L^{q'}_{\mathrm{loc}}(S; H)$ such that, for a.e. $t \in S$, $g(t) \in \partial\Phi\big(u(t)\big)$ and*

$$u'(t) + g(t) + B(t, u(t)) = f(t) \quad \textit{in} \;\; V'.$$

The problem of finding a solution of variational inequality (3) for given Φ, B, f be called the problem $\mathbf{P}(\Phi, B, f)$, and the function u be called its solution.

Additionally, assume that the following hold: there exist the constants $p > 2$, $q > 2$, $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, $K_3 > 0$ such that

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant K_1 |v_1 - v_2|^2 + K_2 |v_1 - v_2|^q \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi;$$

$$\Phi(v) \geqslant K_3 \|v\|^p \quad \forall\, v \in \mathrm{dom}(\Phi).$$

The main results are following.

Theorem. Let $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ and $L < K_2$ holds. Then the problem $\mathbf{P}(\Phi, B, f)$ has a unique solution.

A.L. Skubachevskii

Elliptic Functional Differential Equations with Mixed Boundary Conditions

RUDN University, Russia
E-mail: skub@lector.ru

We consider mixed boundary value problem for second order strongly elliptic differential-difference equations in a cylinder with the Dirichlet boundary conditions on the bases of cylinder and the Neumann boundary conditions on cylindrical part of boundary.

We establish existence and uniqueness of generalized solution to the above problem and smoothness of generalized solutions in some subdomains. We prove that a regular difference operator is an isomorphism mapping subspace of the Sobolev space with homogeneous Dirichlet boundary conditions on the bases of cylinder onto subspace of the Sobolev space with nonlocal boundary conditions. This property of difference operators allows to show that the mixed nonlocal boundary value problem for second order elliptic differential equation has a unique generalized solution.

It was also proved that a second order strongly elliptic differential-difference operator with mixed boundary conditions is regular accretive and satisfies the Kato conjecture [1]. Some of results were obtained jointly with V. V. Liiko [2].

This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation: agreement no. 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

[1] Kato T. *Fractional powers of dissipative operators I*// J. Math. Soc. Japan. – 1961. – **13**:3. – 246–274.

[2] Liiko V.V., Skubachevskii A.L., *Mixed Problems for Strongly Elliptic Differential-Difference Equations in a Cylinder*// Math. Notes. – 2020. – **107**, No. 5. – 770–790.

Alexandru Şubă[1,2], *Silvia Turuta*[1]

Problem of the center for cubic differential systems with invariant straight lines, including the line at infinity, of total multiplicity five

[1] *Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science,*
[2] *Tiraspol State University, Chişinău, Republic of Moldova*
E-mail: alexandru.suba@math.md, poderioghin_silvia@yahoo.com

We consider the real cubic system of differential equations

$$\begin{array}{l} \dot{x} = y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv p\left(x, y\right), \\ \dot{y} = -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv q\left(x, y\right), \\ \gcd(p, q) = 1, sx^4 + (k{+}q)x^3y + (m{+}n)x^2y^2 + (l{+}p)xy^3 + ry^4 \not\equiv 0 \end{array} \quad (1)$$

and the homogeneous system associated to the system (1): $\{\dot{x} = P\left(x, y, Z\right),\ \dot{y} = Q\left(x, y, Z\right)\}$, where

$$\begin{array}{l} P\left(x, y, Z\right) = yZ^2 + (ax^2 + cxy + fy^2)Z + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3, \\ Q\left(x, y, Z\right) = -(xZ^2 + (gx^2 + dxy + by^2)Z + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3). \end{array}$$

Denote $\mathbb{X} = p\left(x, y\right) \frac{\partial}{\partial x} + q\left(x, y\right) \frac{\partial}{\partial y}$, $\mathbb{X}_\infty = P\left(x, y, Z\right) \frac{\partial}{\partial x} + Q\left(x, y, Z\right) \frac{\partial}{\partial y}$.

The critical point $(0, 0)$ of system (1) is either a focus or a center, i.e. is monodromic. The problem of distinguishing between a center and a focus is called the *problem of the center* or the *center-focus problem.*

We say that the straight line $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ is called *invariant* for (1) if there exists a polynomial $K \in \mathbb{C}[x, y]$ such that the identity $\alpha p(x, y) + \beta q(x, y) \equiv (\alpha x + \beta y + \gamma)K(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ holds.

The invariant straight line $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (respectively, the line at infinity $Z = 0$) has *multiplicity* ν (respectively, $\nu + 1$) if ν is the greatest positive integer such that $(\alpha x + \beta y + \gamma)^\nu$ (respectively, Z^ν) divides $E = p\mathbb{X}(q) - q\mathbb{X}(p)$ (respectively, $E_\infty = P\mathbb{X}_\infty(Q) - Q\mathbb{X}_\infty(P)$) [1].

Theorem 1. *The cubic system* (1) *with invariant straight lines (including the line at infinity) of total multiplicity at least five has a center at the origin* $(0, 0)$ *if and only if the first two Lyapunov quantities vanish.*

[1] Christopher C., Llibre J. and Pereira J.V. *Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields* // Pacific J. of Math. – 2007. – **329**, 1. – Pp. 63–117.

Ivan Tikhonov[1], *Vladimir Sherstyukov*[2], *Yuli Eidelman*[3]

Some general approaches to non-local problems for abstract evolutionary equations

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
E-mail: ivtikh@mail.ru
[2] *National Research Nuclear University, Moscow, Russia*
E-mail: shervb73@gmail.com
[3] *Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel*
E-mail: eideyu@post.tau.ac.il

In a Banach space E on an interval $[0,1]$ we consider a nonlocal problem

$$\frac{du}{dt} = Au(t), \qquad \int_0^1 u(t)\,d\mu(t) = \varphi,$$

with a given element $\varphi \in E$. Here A is a closed linear operator in E with domain $D(A)$, and $\mu \in BV[0,\,1]$. We suppose also that $\mu(1) \neq \mu(0)$.

In solving this problem, it is useful to have a system of *Appell polynomials* (see [1]) such that $P_0(t) \equiv (\mu(1) - \mu(0))^{-1}$ and

$$P_n'(t) = n\,P_{n-1}(t), \qquad \int_0^1 P_n(t)\,d\mu(t) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

If $\varphi \in D(A^\infty)$ under some restrictions, then a solution of the non-local problem is represented in the form of

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(t)}{n!}\,A^n\varphi, \qquad t \in [0,\,1].$$

In the case of a standard measure $d\mu(t) \equiv dt$, the system of Appell polynomials transforms into the system of classical *Bernoulli polynomials* $B_n(t)$ (see [1], [2]). A detailed discussion of the formulas for this special case is given in the paper [3]. The proposed approach is of interest for the theory of fast matrix computation algorithms (see [4]).

The reported study was partially funded by RFBR according to the research project 18-01-00236.

[1] Bourbaki N. *Éléments de mathématique. Premiére partie. Livre IV: Fonctions d'une variable réelle (théorie élémentaire).* – Paris: Hermann, 1958.

[2] Erdelyi A. *Higher Trancendental Functions (Bateman Manuscript Project).* – New York: McGraw-Hill, 1953.

[3] Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Eidelman Yu. S. *Application of Bernoulli polynomials in non-classical problems of mathematical physics* // Systems of computer mathematics and their applications. – 2017. – **18**. – C. 223–226 (in Russian).

[4] Boito P., Eidelman Yu. S., Gemignani L. *Computing the inverse of a φ-function by rational approximation* // arXiv: 1801.04573 [math.NA].

Mykola Yaremenko

Existence of solutions of quasi-linear parabolic differential equations under form-boundary conditions

The National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine
E-mail: math.kiev@gmail.com

This work is dedicated to deepening our comprehension of the regularity of the solutions to the Cauchy problem for the quasi-linear second-order parabolic partial differential equations under fair general conditions on the perturbations.

Let us consider the quasilinear second-order parabolic partial differential equations

$$\frac{\partial}{\partial t}u+\lambda u-\sum_{i,j=1,..,l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,u)\frac{\partial}{\partial x_j}u\right)+b(x,u,\nabla u)=f(t,x), \quad (1)$$

under the initiation conditions

$$u\left(0,x\right)=u_0\left(x\right),$$

where $u\left(t,x\right)$ is the unknown function, $\lambda>0$ is a real number and $f(t,x)=f$ is a given function. The term $b(x,u,\nabla u)$ is a measurable function of three arguments.

The matrix $a_{ij}(x,u)$ is a measurable elliptical matrix $l\times l$ size such that there is a numbers ν and $\mu:\quad 0<\nu<\mu<\infty$ such that

$$\nu\sum_{i=1}^{l}\xi_i^2\leq\sum_{ij=1,\dots,l}a_{ij}(t,x,u)\xi_i\xi_j\leq\mu\sum_{i=1}^{l}\xi_i^2\quad\forall\xi\in R^l.$$

Definition. A real-valued function $u\left(t,x\right)$ *is called a weak solution to the parabolical partial differential equation* (1) *if the integral identity*

$$\begin{aligned}&\left\langle u(\tau),v(\tau)\right\rangle|_0^t+\int_0^t\left(-\left\langle u(\tau),\partial_t v(\tau)\right\rangle+\lambda\left\langle u(\tau),v(\tau)\right\rangle\right)d\tau+\\&+\int_0^t\left\langle\sum_{i,j=1,\dots,l}a_{ij}\tfrac{\partial}{\partial x_j}u,\tfrac{\partial}{\partial x_i}v\right\rangle d\tau+\int_0^t\left\langle b,v\right\rangle d\tau=\int_0^t\left\langle f,v\right\rangle d\tau\end{aligned}\quad (2)$$

holds for almost every $t \in [0,T]$, $x \in R^l$ *and for all* $v \in W^q_{1,0}$.

The conditions of linear growth:

1. $b(x, y, z)$ is a measurable function of its arguments and $b \in L^1_{loc}(R^l)$;

2. function $b(x, y, z)$ satisfies inequality:

$$|b\,(t, x, u, \nabla u)| \le \mu_1(x)\,|\nabla u| + \mu_2(x)\,|u| + \mu_3(x) \tag{3}$$

where the functions $\mu_1^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_2 \in PK_\beta(A)$ and $\mu_3 \in L^p(R^l)$.

3. the increase of function $b(x, y, z)$ satisfies the inequality

$$|b\,(t, x, u, \nabla u) - b\,(t, x, v, \nabla v)| \le \mu_4(x)\,|\nabla\,(u - v)| + \mu_5(x)\,|u - v|\,, \tag{4}$$

where the functions $\mu_4^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_5 \in PK_\beta(A)$.

Here we introduce the class of form-bounded functions PK_β according to formula-definition

$$PK_\beta(A) = \left\{ g \in L^1_{loc}(R^l, d^l x) : \quad \left| \left\langle g\,|h|^2 \right\rangle \right| \le \beta \left\langle A^{\frac{1}{2}} h, A^{\frac{1}{2}} h \right\rangle + c\,(\beta)\,||h||_2^2 \right\},$$

where a $h \in D(A^{\frac{1}{2}})$ and $\beta > 0$ is a form-boundary and $c\,(\beta) \in R^1$.

Theorem 1. *Assuming that the Cauchy's problem*

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \lambda u - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, u) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + b(x, u, \nabla u) = f(t, x),$$

$$u\,(0, x) = u_0\,(x)\,,$$

under the form-bounded on b *and condition* $vrai \max \left| \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} \right| < \infty$ *has a solution* $u \in W^2_{1,1}$, *then the solution belongs* $W^2_{2,1}$.

Theorem 2. *The quasi-linear parabolic partial differential equation* (1) *under the conditions* (3), (4) *has the solution from* $W^2_1\left([0,T] \times R^l\right)$.

[1] Yaremenko M.I. The existence of a solution of evolution and elliptic equations with singular coefficients / M.I.Yaremenko // Asian Journal of Mathematics and Computer Research. – 2017. – Vol.: 15, Issue.: 3. pp. 172- 204.

[2] Yaremenko M.I. Quasi-linear evolution and elliptic equations / M.I. Yaremenko // Journal of Progressive Research in Mathematics. – Vol.11., №3. – 2017 pp. 1645-1669.

Анна Аноп, Олександр Мурач

Про регулярні еліптичні задачі з грубими крайовими даними

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: ahlv@ukr.net, murach@imath.kiev.ua

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з межею $\Gamma \in C^\infty$ розглядається регулярна еліптична крайова задача

$$Au = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad B_j u = g_j \ \text{ на } \ \Gamma, \ \ j = 1, ..., q. \tag{1}$$

Тут $A = A(x, D)$ — еліптичний лінійний диференціальний оператор (л.д.о.) парного порядку $2q \geq 2$, а кожне $B_j = B_j(x, D)$ — крайовий л.д.о. порядку $m_j \leq 2q - 1$. Усі коефіцієнти операторів A і B_j належать до комплексних просторів $C^\infty(\overline{\Omega})$ і $C^\infty(\Gamma)$ відповідно. Розглядається випадок, коли крайові дані g_j можуть бути як завгодно грубими, тобто є довільними розподілами на Γ.

Така еліптична задача досліджується у шкалі узагальнених просторів Соболєва H^α, для яких показником регулярності служить довільна функція $\alpha \in \mathrm{OR}$. Клас OR складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$, для кожної з яких існують дійсні числа $r_0 < r_1$ і $c_0, c_1 > 0$ такі, що

$$c_0 \lambda^{r_0} \leq \alpha(\lambda t)/\alpha(t) \leq c_1 \lambda^{r_1} \quad \text{для усіх } \ \lambda, t \in [1, \infty). \tag{2}$$

Ці функції називають OR-змінними на ∞ за В. Г. Авакумовичем. Нехай $\sigma_0(\alpha)$ — супремум усіх r_0 таких, що виконується ліва нерівність в (2), а $\sigma_1(\alpha)$ — інфімум усіх r_1 таких, що виконується права нерівність в (2).

Комплексний гільбертів простір $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\alpha(\langle\xi\rangle)\mathcal{F}w(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Тут $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, а $\mathcal{F}$ — перетворення Фур'є. Норма розподілу w у цьому просторі дорівнює нормі функції $\alpha(\langle\xi\rangle)\mathcal{F}w(\xi)$ у просторі $L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Гільбертові простори $H^\alpha(\Omega)$ і $H^\alpha(\Gamma)$ означаються за простором на $\mathbb{R}^n$ у стандартний спосіб. Якщо $\alpha(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, вони стають соболєвськими просторами порядку s.

Оскільки усі $g_j \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, то $g_j \in H^{\varphi_j}(\Gamma)$ для деякого $\varphi \in \mathrm{OR}$, де $\varphi_j(t) \equiv \varphi(t) t^{2q - m_j - 1/2}$. Для грубих крайових даних число $\sigma_0(\varphi)$

може бути як завгодно малим. Нехай $\sigma_0(\varphi) \leq -1/2$. У випадку $\sigma_1(\varphi) \geq -1/2$ виберемо числа $s_0 < \sigma_0(\varphi)$, $s_1 > \sigma_1(\varphi)$ і $\lambda \in (-1/2, s_1]$ та покладемо $\eta(t) := t^{(1-\theta)s_1}\varphi(t^\theta)$ при $t \geq 1$, де $\theta := (s_1-\lambda)/(s_1-s_0)$. У випадку $\sigma_1(\varphi) < -1/2$ виберемо число $\lambda > -1/2$ та покладемо $\eta(t) := t^\lambda$ при $t \geq 1$. Нехай $H^{\varphi\rho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$ є гільбертів простір усіх $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ таких, що $Au \in H^\eta(\Omega)$, наділений скалярним добутком графіка; тут $\varphi\rho^{2q}$ позначає функцію $\varphi(t)t^{2q}$ аргументу $t \geq 1$.

Теорема 1. *Множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ є щільною в просторі $H^{\varphi\rho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$, а відображення $u \mapsto (Au, B_1u, \ldots, B_qu)$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого нетерового оператора на парі просторів $H^{\varphi\rho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$ і $H^\eta(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^q H^{\varphi_j}(\Gamma)$. Його ядро лежить у $C^\infty(\overline{\Omega})$ та разом з індексом не залежить від φ і η.*

За допомогою цього результату доведено теорему про ізоморфізм, породжений еліптичної задачею (1) між деякими підпросторами просторів, що фігурують у теоремі 1, і теореми про локальну (аж до межі Γ) регулярність узагальнених розв'язків цієї задачі та їх локальну апріорну оцінку. Отримано застосування вказаних теорем до однорідних еліптичних рівнянь, інтерполяції функціональних гільбертових просторів, пов'язаними з цими рівняннями, та до еліптичних задач з білим шумом у крайових умовах. Наведемо останнє.

Теорема 2. *Розглянемо задачу Діріхле, яка складається з рівняння Пуассона $\Delta u = f$ у (двовимірному) крузі Ω і крайової умови $u\restriction\Gamma = \xi$, де $\xi\colon \widetilde{\Omega} \to \mathcal{D}'(\Gamma)$ є Гаусів білий шум, а $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{R}, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір. Припустимо, що $f \in H^\eta(\Omega)$, де $\eta(t) \equiv t^\lambda$ для деякого $\lambda > -1/2$. Тоді для $\mathbb{P}$-майже усіх $\omega \in \widetilde{\Omega}$ існує єдиний розв'язок $u(\omega,\cdot)$ цієї задачі, який належить до $H^\alpha(\Omega)$ для довільного $\alpha \in \mathrm{OR}$ такого, що $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = 0$ і $\int_1^\infty \alpha_0^2(t)dt/t < \infty$. Окрім того, оцінка*

$$\|u(\omega,\cdot)\|_{H^\alpha(\Omega)} \leq c_\alpha\bigl(\|f\|_{H^\lambda(\Omega)} + \|\xi(\omega)\|_{B^{-1/2}_{2,\infty}(\Gamma)}\bigr)$$

виконується для $\mathbb{P}$-майже усіх $\omega \in \widetilde{\Omega}$, де число $c_\alpha > 0$ не залежить від f, ξ та ω. Тут $B^{-1/2}_{2,\infty}(\Gamma)$ — простір Нікольського порядку $-1/2$ та індексу сумовності 2.

Ці результати отримані спільно з Р. Денком [1].

[1] Anop A., Denk R., Murach A. *Elliptic problems with rough boundary data in generalized Sobolev spaces* // arXiv:2003.05360. – 2020. – 40 p.

Ірина Апанасенко, Світлана Гембарська,
Денис Караханов, Костянтин Жигалло

Аналог інтеграла Пуассона для еліптичних областей

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
E-mail: iapanasenko19@gmail.com, gembarskaya72@gmail.com,
den.karahanov@gmail.com, zhyhallo@modulsoft.eu

Розглянемо крайову задачу (в одиничному крузі) для рівняння

$$\Delta U = 0 \tag{1}$$

де Δ — оператор Лапласа в полярних координатах. Тобто рівняння (1) записується у вигляді

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \le \rho < 1, -\pi \le x \le \pi) \tag{2}$$

Розв'язок рівняння (1), що задовольняє крайовій умові

$$U(\rho, x)\big|_{\rho=1} = f(x),\ -\pi \le x \le \pi, \tag{3}$$

де $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, далі буде позначатися через $U(\rho, x) = A(\rho; f; x)$. Тоді розв'язок крайової задачі (2)–(3) згідно [1], [2] можна записати у вигляді

$$A(\rho; f; x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}dt,\ 0 \le \rho < 1. \tag{4}$$

Величину (4) прийнято називати інтегралом Пуассона функції f.

Якщо ж тепер розглянути аналогічну крайову задачу в області

$$G = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1,\ 0 < b < a\right\},$$

то її розв'язком буде функція

$$u(\alpha, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(t)\Big[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\operatorname{ch} n\alpha}{\operatorname{ch} n\alpha_0}\cos n\varphi\cos nt +$$

$$+\frac{\operatorname{sh} n\alpha}{\operatorname{sh} n\alpha_0}\sin n\varphi \sin nt\Big)\Big]dt,$$

де $x = c\operatorname{ch}\alpha\cos\varphi, y = c\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi,\ \ \alpha \in [0,\alpha_0]\,,\ \varphi \in [0,2\pi]\,,\ c > 0.$

[1] Бугров Я.С. *Неравенства типа Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка* // Mathematica (Cluj). – 1963. – **5**, № 28. – С. 5-25

[2] Бугров Я.С *Дифференциальные свойства решений некоторого класса дифференциальных уравнений высшего порядка* // Матем. сб. – 1964. – **63(105)**, № 1. – С. 59-121

Олена Атласюк, Володимир Михайлець

Про граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач із параметром у просторах Соболєва

Інститут математики, Національна академія наук України, Київ, Україна
E-mails: atlasiuk@imath.kiev.ua, mikhailets@imath.kiev.ua

Нехай задано скінченний інтервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$ та числові параметри $\{m,r,N\} \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq p \leq \infty$. Позначимо через $W_p^n = W_p^n\big([a,b];\mathbb{C}\big) := \big\{y \in C^{n-1}[a,b] \colon y^{(n-1)} \in AC[a,b],\, y^{(n)} \in L_p[a,b]\big\}$ комплексний простір Соболєва.

Зафіксуємо число $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо лінійну багатоточкову крайову задачу, залежну від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) := y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n+r-1} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon) = q(\varepsilon),\ t \in (a,b), \tag{2}$$

де при кожному фіксованому значенні параметра ε матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^m$, вектори $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$, матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm\times m}$ та лінійний неперервний оператор $B(\varepsilon) \colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^{rm}$ довільно задано; а вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$ є невідомою.

Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$, яка задовольняє рівняння (1) (при $n \geq 1$ скрізь, а при $n = 0$ майже скрізь) на (a,b), та рівність (2), яка задає rm скалярних крайових умов. Крайова умова (2) не є класичною, тому що містить похідні $y^{(l)}$ цілого порядку l, де $0 < l \leq n+r-1$.

Крайовій задачі (1), (2) відповідає лінійний оператор

$$\big(L(\varepsilon), B(\varepsilon)\big) \colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{3}$$

Згідно з [1], (3) є обмеженим фредгольмовим оператором з індексом нуль.

Вважаємо, що виконана така умова: однорідна гранична крайова задача вигляду (1), (2) має лише тривіальний розв'язок, тобто є невиродженою. Звідси випливає, що при $\varepsilon = 0$ фредгольмовий оператор (3) є ізоморфізмом. Тому крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок $y(t,0) \in (W_p^{n+r})^m$ і визначена однозначно для довільно вибраних правих частин $f(t,0) \in (W_p^n)^m$ і $q(0) \in \mathbb{C}^{rm}$.

Встановлено явні достатні умови на ліві частини крайових задач (1), (2), за яких

– ці задачі є однозначно розв'язні для достатньо малих ε;

– розв'язок $y = y(\cdot,\varepsilon)$ багатоточкової крайової задачі (1), (2) неперервний за параметром ε у просторі Соболєва W_p^{n+r}, $1 \le p \le \infty$, тобто розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ існує, єдиний і задовольняє граничне співвідношення

$$\big\| y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0) \big\|_{n+r,p} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Окремо розглянуто два випадки: $1 \le p < \infty$ і $p = \infty$ [2].

Для диференціальних рівнянь першого порядку ($r = 1$) результати доповіді містяться у роботі [3]. У загальному випадку диференціальних рівнянь довільного порядку доведення отриманих результатів ґрунтуються на критерію неперервності за параметром розв'язків найбільш загальних крайових задач у просторах Соболєва, наведеному у роботі [4].

[1] Атласюк О. М., Михайлець В. А. *Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболева* // Доп. НАН України. – 2019, 11. – С. 3 – 7.

[2] Атласюк О. М. *Граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач із параметром у просторах Соболева* // Український математичний журнал. – 2020. – **72**, 8. – P. 1015 – 1023.

[3] Atlasiuk O. M. *Limit theorems for solutions of multipoint boundary-value problems in Sobolev spaces* // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – **247**, 2. – P. 238 – 247.

[4] Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A. *On Fredholm parameter-dependent boundary-value problems in Sobolev spaces* // Dopov. Nats. Acad. Nauk Ukr. – 2020, 6. – P. 3 – 6.

Ярослав Баранецький, Петро Каленюк

Нелокальна задача з багатоточковими умовами типу Діріхлє-Неймана для еліптичного рівняння з постійними коефіцієнтами

[1] *Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна*
E-mail: baryarom@ukr.net. pkalenyuk@gmail.com

У m-вимірному паралелепіпеді G вивчаються властивості задачі з нелокальними умовами, які є багатоточковими збуреннями крайових умов Діріхлє-Неймана.

Зокрема, побудовано узагальнений оператор перетворення який відображає розв'язки задачі із крайовими умовами Діріхлє-Неймана в розв'язки досліджуваної багатоточкової задачі.

Побудовано систему власних функцій $V(L)$ оператора L багатоточкової задачі.

Визначено умови, при яких система $V(L)$ повна та мінімальна та умови, за яких вона є базисом Рісса у просторі $L_2(G)$.

Для випадку еліптичного рівняння встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі.

Іван Бейко

Методи комплексної побудови оптимальних і асимптотично-оптимальних граф-операторних моделей

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна
E-mail: ivan.beyko@gmail.com

Багатокритеріальнаоптимізаціяматематичних моделей причинно-наслідкових залежностей між складними взаємодіючими процесами об'єктивної реальності в умовах неповних даних та неповних знаньпов'язана зазвичай із багатьма критеріями оптимальності, до яких належить точність отриманих результатів досліджень та обсяг необхідної для цього обчислювальної роботи при використанні математичної моделі. У цьому зв'язку визначаються -адекватні та B -адекватні математичні моделі на заданих множинах допустимих збурень в умовах неповних даних. Побудова -адекватних та B -адекватних моделей основана на відшуканні та уточненні наявних знань про об'єктивні причинно-наслідкові залежності за допомогою адекватної декомпозиції складної системи на підсистеми робочих моделей граф-операторної моделі. Такі підсистеми часто описуються алгебраїчними, алгебраїчно-диференційними рівняннями з частинними похідними та більш загальними функціональними рівняннями досліджуванихпричинно-наслідкових залежностей. Із використанням критеріїв оцінювання моделей за обсягом обчислювальної роботи і за оцінками точності обчислюваних результатів визначаються-оптимальні по швидкодії, оптимальні по точності, K-оптимальні та асимптотично оптимальні робочі моделі на множині допустимих параметрів неповних даних, параметрів дискретної аппроксимації похіднихта параметрів дискретизації динамічних процесів за часовими і просторовими координатами[1-3].Розглядаютьсязадачі побудови оптимізованих моделей із одночасною побудовою оптимального керування в умовах неповних знань і неповних даних про причинно-наслідкові залежності у взаємодіючих підсистемах керованоїграф-оператоної системи. Оптимізація граф-операторних моделей за критеріями мінімізації часу, обсягу обчислень та похибок обчислюваних результатів здійснюється із використанням методів розв'язуючих та асимптотично-розв'язуючих операторів упобудові алгоритмів оптимізованої корекції стратегій керування та оптимізованої агрегації моделей підсистем за даними чисельних експериментів та натурних спостережень.Розв'язуючі оператори узагальнюють псевдо обернені матриці та функції Гріна на випадок неповних даних. Якщо практична побудова розв'язуючих операторів для нелінійної задачі виявляється надто трудомісткою, то замість розв'язуючих будуються або асимптотично-розв'язуючі або мінімаксно розв'язуючі оператори. За допомогою асимптотично-розв'язуючих операторів другого порядку, які узагальнюють на випадок недиференційованих критеріїв оптимальності відому в теорії автоматичного керування функцію чутливості, та асимптотичних апроксимації вищих порядків будуються прискорені алгоритми для оптимізації складних керованих систем. Їх використання дозволяє суттєво спрощувати алгоритми для розв'язування комплексних задач паралельної оптимізації моделей і стратегій керування із оптимальним використанням в реальному часі поточних даних спостережень.

[1] Бахвалов Н.С., Воеводин В.В. *Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования.* – Москва: Наука, 2005. – 343 с.

[2] Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. *Задачі, методи і алгоритми оптимізації.* – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2012. – 799 с.

[3] Бейко І.В. *Уніфікована теорія оптимального моделювання* (англійською мовою), Proc. 15thIMACS, WorldCongress (IMACS'97), Berlin, 25-29.08.97.

Іван Бейко[1], *Олеся Фуртель*[2]

До побудови узагальнених розв'язків несумісних систем алгебро-інтегро-диференціальних і функціональних рівнянь

[1] *Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна*
E-mail: ivan.beyko@gmail.com
[2] *Кам'янець-Подільський національнийуніверситетіменіІванаОгієнка, м.Кам'янець-Подільський, Україна*

Глобальна комп'ютеризація і математизація сучасної науки сприяластворенню потужногоматематично-комп'ютерного інструментарію як для побудови адекватних математичних моделей причинно-наслідкових залежностей між складними взаємодіючими керованими підсистемами так і у напрямку удосконалення математичних методівдослідження великих систем, якими описуються ці моделі із підсистемами алгебраїчних, диференціальних, алгебро-інтегро-диференціальних із звичайними і частинними похіднимита функціональних рівнянь (що описують також і додаткові умови замість, зазвичай, невідомих початковихі крайових умов). Алгебраїчними рівняннями описуються зазвичай матричні причинно-наслідкові залежності у евклідових просторах, які зазвичай мають надвеликі розмірності навіть для сучасної надпотужної обчислювальної техніки ібуваютьнесумісними у зв'язку з наявністю неповних даних - параметрів системи, значення яких задані із або з геометричною або з ймовірнісною неповнотою даних. Диференціальні рівняння та рівняння з частинними похідними, які описують причинно-наслідкові властивості шуканих розв'язків у просторах диференційованих функцій одної та багатьох змінних, також включають зазвичай функціональні параметри (функціональні збурення)з геометричною та з ймовірнісною неповнотою даних (геометрична неповнота даних описується заданими множинами, яким належать невідомі значення параметрів, а ймовірнісна неповнота даних характеризується тим, що значення цих параметрів є випадковими величинами або із заданими функціями розподілу, або із заданими множинами, яким належать ці функції розподілу). Більш складними функціональними залежностями описуються зазвичай складнші додаткові обмеження, які узагальнюють класичні початкові та крайові умови (наприклад, замість невідомих початкових та крайових умов задаються значення функціоналів від невідомого розв'язку і в умовах неповних даних це може призводити до несумісних систем. У процесі розв'язання проблем несумісності формулюються поняття узагальнених розв'язків як мінімізаторіввибраних функціоналів нев'язки.Будуються практично ефективні алгоритми дляобчислення узагальнених розв'язків із використанням квадратичних або мінімакснихфункціоналів нев'язки. Вибір квадратичних функціоналів із наявними градієнтами та гессіанами забезпечує можливості побудови ітераційних градієнтних алгоритмів та прискорених алгоритмівдругого порядку збіжності. У випадку мінімакснихфункціоналів нев'язки узагальнені розв'язки обчислюються за допомогою розв'язання задач мінімаксної оптимізації із використанням узагальнених квазіградієнтів або опорних градієнтів та побудованих на їх основі чисельних алгоритмів мінімаксної оптимізації [1,2]. Побудова відповіднихалгоритмів для задач великої розмірності із частинними похідними високих порядків здійснюється за допомогою ітераційних методів оптимізації із паралельним уточненням дискретнихапроксимацій частинних похідних вихідної системи, а також за допомогою побудовиглобально конструктивних апроксимацій всієї системи, які основані на зведенні вихідної системи до оптимізаційних задачіз суттєво спрощеними агрегованими системами, які розв'язуються за ітераційними алгоритмами прискореної збіжності.

[1] Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. *Задачі, методи і алгоритми оптимізації.* – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2012. – 799 с.

[2] Бейко І.В. *Уніфікована методологія розв'язуючих операторів як новітня інформаційна технологія для відшукання нових знань і прийняття оптимальних рішень* (англійською мовою) // Proc. "The Information Technology Contribution to the Building of a Safe Regional Environment".– Kiev: AFCEA, 1998. – С. 44–50

Ярослав Бігун[1], *Марина Патратій*[2],
Анастасія Юрійчук[1]

Математична модель впливу екологічного фактору на імунну відповідь при інфекційних захворюваннях

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*
E-mail: y.bihun@chnu.edu.ua, a.yuriychuk@chnu.edu.ua

[2] *Буковинський державний медичний університет,*
E-mail: marina.patratyi@gmail.com

У 1975 р. Г.І. Марчук запропонував математичну модель імунної відповіді при інфекційному захворюванні [1]. Надалі ця модель узагальнена у різних напрямках [2, 3] та ін., й адаптована до конкретних захворювань, таких як вірусні гепатити B та C, бактеріальна пневмонія та ін.

Основними факторами в моделі Г.І. Марчука є концентрація антигенів $V(t)$, плазмоклітин $C(t)$ й антитіл $F(t)$, а також міри ураження органу-мішені $m(t)$, $0 \leq m(t) \leq 1$, які змінюються з часом.

У даній роботі для моделі Г.І. Марчука запропоновано загальніший вигляд рівняння для динаміки антигенів, а також враховано вплив екологічного фактору. Якщо забруднення довкілля перевищує деяке допустиме значення, то це може негативно впливати на процес утворення плазмоклітин і прискорювати ураження органу-мішені.

Нехай $E(t)$ - усереднений показник забруднення довкілля,

$$E(t) = \alpha_1 E_1(t) + \alpha_2 E_2(t) + \cdots + \alpha_n E_n(t),$$

де $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, $E_i(t)$ - оцінка забруднення і-м фактором. Припустимо, що $\Delta > 0$ - середній час відновлення екологічної рівноваги і фактор $E(t)$ описується рівнянням Хатчінсона. У підсумку модель набуває вигляду

$$\frac{dV}{dt} = \beta\Big(1 - \delta \left(\frac{V}{K}\right)^n\Big)V - \gamma F V,$$

$$\frac{dC}{dt} = \xi(m)\alpha F_\tau V_\tau - \mu_c(C - C^*) - \mu_1(E - E^*),$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \eta\gamma FV - \mu_f F,$$

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m + \mu_2(E - E^*),$$

$$\frac{dE}{dt} = r\Big(1 - \frac{E(t-\Delta)}{E^*}\Big)E(t),$$

де $t \geq 0$, $F_\tau(t) = F(t-\tau)$, $V_\tau(t) = V(t-\tau)$ параметри моделі – невід'ємні числа, τ – час, на протязі якого формується каскад плазмоклітин.

Один із стаціонарних розв'язків, який відповідає стану здорового організму і нормативному показнику забруднення E^* такий

$$V_1 = m_1 = 0, C_1 = C^*, F_1 = \rho C^*/\mu_f.$$

Для малих збурень початкових умов стаціонарний розв'язок асимптотично стійкий при виконанні умов

$$\beta < \gamma\rho C^*/\mu_f, 2r\Delta < \pi.$$

Для випадку хронічного захворювання детально розглянуто випадок $n = 1$ і $\xi(m) = 1$. Для випадку $\beta \geq \gamma\rho C^*/\mu_f$ і сильної імунної відповіді, коли $\alpha\rho > \mu_c\eta\gamma$, існує два стаціонарних розв'язки. Один із них є стійким при виконанні певних умов на коефіцієнти моделі.

У випадку імунодефіциту, коли $\alpha\rho < \mu_c\eta\gamma$, може існувати один або два стаціонарних розв'язки, зокрема залежно від E^*, які є нестійкими

[1] Marchuk G.I. *Mathematical Modelling of Immune Response in Infectious Diseases.* – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997. – 347 p.

[2] Forys U. *Marchuk's model of immune system dynamics with application to tumour growth* // Journal Theor. Med. – 2002. – **4**, No 1. – P. 85-93.

[3] Романюха А.А. *Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний.* – М. БИНОМ, 2012. – 295 с.

Ярослав Бігун, Ігор Скутар

Усереднення в системі із лінійно перетвореними аргументами під дією багаточастотних збурень

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: y.bihun@chnu.edu.ua, i.skutar@chnu.edu.ua

Звичайні диференціальні рівняння з інтегральними умовами досліджувалися у багатьох працях [1, 2]. Такі умови виникають у задачах хімічної технології, динаміки популяцій та ін.

Багаточастотні системи, які описуються диференціальними рівняннями із лінійно перетвореними аргументами й інтегральними умовами, методом усереднення досліджувалися в [3, 4]. У даній праці метод усереднення за швидкими змінними [5] застосований для дослідження існування та єдиності розв'язку і побудови оцінки похибки методу усереднення для нелінійного гіперболічного рівняння під дією багаточастотних збурень. Розглянуто задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(\tau, x, u_\Delta, a_\Lambda, \varphi_\Theta, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{2}$$

де $0 \le \tau \le L$, $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, $\lambda_i, \theta_j \in (0, 1)$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j \tau)$, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

Для системи рівнянь (1), (3) задано умови:

$$u(x, 0) = v(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial \tau} = w(x), x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

$$\sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu a(\tau_\nu) = d_1, \quad 0 \le \tau_1 < \tau_1 < \dots \tau_l \le L, \tag{4}$$

$$\int\limits_{0}^{t_1} \big[\sum_{\nu=1}^{s} b_\nu(\tau)\varphi(\theta_\nu\tau) + g_1(\tau, a_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau))\big] d\tau +$$
$$+ \int\limits_{t_2}^{L} \big[\sum_{\nu=1}^{s} c\nu(\tau)\varphi(\theta_\nu\tau) + g_2(\tau, a_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau))\big] d\tau = d_2. \tag{5}$$

У роботі одержано оцінку вигляду

$$\|I_k(\tau,\varepsilon)\| \leq \sigma\varepsilon^\alpha, \alpha = (ms)^{-1}, \sigma = const > 0, k \neq 0$$

для відповідного системі (3) осциляційного інтеграла [5].

Доведено існування єдиного розв'язку незбуреного ($f = 0$) рівняння (1) із початковими умовами (3) і обгрунтовано метод усереднення для задачі (1)-(4).

Теорема 1. *Нехай:*

1) *вектор-функції* $X, Y, \in C^{2,ms+1}_{(\tau,a_\Lambda),\varphi_\Theta}$ *й обмежені разом із похідними в області* $G = [0,\tau] \times \mathbb{D}^{rn} \times \mathbb{R}^{sm}$;
2) $\omega_\nu \in C^{ms-1}[0,L], \nu = \overline{1,m}$;
3) *визначник Вронського, побудований за системою функцій* $\{\omega(\Theta_1\tau), \ldots, \omega_m(\Theta_s\tau)\}$, *відмінний від нуля для* $\tau \in [0,L]$;
4) *існує єдиний розв'язок* $\bar{a} = \bar{a}(\tau,\bar{y}), \tau \in [0,L], \bar{y}(0,\bar{y}) = \bar{y}$, *усередненого рівняння для повільних змінних.*

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)-(4) *і для досить малого* $\varepsilon_0 > 0$ *і всіх* $\tau \in [0,L]$, $x \in \mathbb{R}$ *виконується оцінка*

$$\|a(\tau,\varepsilon) - \bar{a}(\tau)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| + \|u(\tau,x,\varepsilon) - \bar{u}(\tau,x)| \leq c\varepsilon^\alpha.$$

[1] Benchohra M., Henderson J., Luka R., Ouahab A. *Boundary Value Problems for Systems of Diferential, Diference and Fractional Equation.* – Dordrecht-Boston-London, Kluwer, 2016. – 307 p.

[2] Jankowski T. *Diferential equations with integral boundary conditions* // Journal Comput. Appl. Math. – 2002. – **147**. – P. 1-8.

[3] Бігун Я.Й., Краснокутська І.В., Петришин Р.І. *Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореними аргументами і точковими та інтегральними умовами* // Буковинський матем. журнал. – 2016. **4**, № 3–4. – С. 30–35.

[4] Бігун Я.Й., Скутар І.Д. *Усереднення в одній багаточастотній системі зі звичайними та частинними похідними і з лінійно перетвореними аргументами* // Вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2012. – **2**, № 2–3. – С. 19–21.

[5] Samoilenko A.M., Petryshyn R.I. *Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems.* – Kluwer, Dordrecht—Boston—London, Netherlands, 2004. – 475 p.

Степан Блажевський

Динамічні термопружні поля в двошарових симетричних просторах

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: s.blazhevskyy@chnu.edu.ua

Динамічне поле напружень в симетричному двошаровому просторі, породжене нестаціонарним температурним полем, опишуть відмінні від тотожнього нуля центральні компоненти тензора напружень

$$\sigma_{11,j}(r,t) = G_{0j}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{(2\alpha_j+1)\mu_j}{1-\mu_j}\frac{u_j}{r} - m_{0j}T_j(t,r)\Big);$$

$$\sigma_{22,j}(r,t) = G_{0j}\Big[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{\partial u_j}{\partial r} + \Big(1+\frac{2\alpha_j\mu_j}{1-\mu_j}\Big)\frac{u_j}{r} - m_{0j}T_j(t,r)\Big]; \qquad (1)$$

$$\sigma_{33,j}(r,t) = G_{0j}\Big[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{\partial u_j}{\partial r} + \Big(2\alpha_j+\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\Big)\frac{u_j}{r} - m_{0j}T_j(t,r)\Big]; j=1,2.$$

При цьому радіальні компоненти $u_j(r,t)$ вектора переміщення повинні бути обмеженим на множині $I_1^+ = \{r : r \in (0,R_1) \cup (R_1,+\infty)\}$ розв'язком сепаратної системи диференціальних гіперболічних рівнянь другого порядку [1]:

$$\frac{1}{c_j^2}\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_j+1}{r}\frac{\partial u_j}{\partial r} - \frac{2\alpha_j+1}{r^2}u_j(r)\right) = m_{0j}\frac{dT_j(r)}{dr}; j=\overline{1,2} \qquad (2)$$

за відповідними початковими умовами та умовами ідеального механічного контакту

$$\begin{cases} [u_1(r,t) - u_2(r,t)]|_{r=R_1} = 0, \\ [\sigma_{11,1}(r,t) - \sigma_{11,2}(r,t)]|_{r=R_1} = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

Розв'язок задачі (1) – (3) побудований методом гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є-Бесселя на кусково-однорідній осі. Проведено аналіз розв'язку для випадку двошарового осесиметричного простору.

[1] Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* – М.: Физматгиз, 1959. – 468с.

Роксолана Блажівська, Ігор Король

Інтегрування двоточкової крайової задачі для вироджених диференціальних систем з імпульсною дією

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна
E-mail: roksolana.blazhivska@uzhnu.edu.ua, ihor.korol@uzhnu.edu.ua

Розглядається вироджена нелінійна система диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$J\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad t, \tau_i \in [a,b], \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x(\tau_i) + b_i, \tag{2}$$

яка задовольняє крайові умови

$$A_1 x(0) + A_2 x(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{3}$$

де J – n-вимірна клітка Жордана, яка відповідає нульовому власному значенню, $A(t)$ – $(n \times n)$-вимірна матриця з неперервними на $[0,T]$ коефіцієнтами, $f(t,x)$ – n- вимірна вектор-функція, $f(t,x) \in C[a;b]$; A_1, A_2 – $((n-1) \times n)$- вимірні сталі матриці, d – $(n-1)$- вимірний сталий вектор, $a \leq \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_p \leq b$.

Для нелінійної крайової задачі (1)-(3) у припущенні, що $f_n(t,x) = f_n(t, x_2, \ldots, x_n)$, $a_{n1}(t) \neq 0 \ \forall t \in [a;b]$, $det(E + \widehat{B}_i) \neq 0 \ \forall i = \overline{1,p}$, де $\widehat{B}_i$ – верхні праві мінори порядку $n-1$ матриць B_i, обґрунтовується можливість застосування чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для дослідження існування та наближеної побудови розв'язків у критичному випадку, тобто коли відповідна лінійна однорідна триточкова крайова задача має k лінійно незалежних розв'язків. Крім того, встановлено конструктивні достатні умови існування розв'язків, одержано оцінки збіжності послідовних наближень.

[1] Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи.*– Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995, 318 с.

Олександр Бойчук, Віктор Ферук

Крайові задачі для слабкосингулярних інтегральних рівнянь

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: boichuk@imath.kiev.ua, feruk.viktor@imath.kiev.ua

Розглядається слабкозбурена крайова задача для слабкосингулярного інтегрального рівняння

$$x(t) = f(t) + \int\limits_a^b \frac{H(t,s)}{|t-s|^\gamma} x(s)ds + \varepsilon \int\limits_a^b \frac{\overline{H}(t,s)}{|t-s|^\beta} x(s)ds, \tag{1}$$

$$lx(\cdot) = \alpha + \varepsilon Jx(\cdot), \tag{2}$$

за припущення, що породжуюча задача, тобто задача

$$x(t) = f(t) + \int\limits_a^b \frac{H(t,s)}{|t-s|^\gamma} x(s)ds,$$

$$lx(\cdot) = \alpha$$

не має розв'язку.

Тут $H(t,s)$, $\overline{H}(t,s)$ — обмежені в області $[a,b] \times [a,b]$ функції, $0 < \gamma < 1$, $0 < \beta < 1$, $f \in L_2[a,b]$, $l = col\left(l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_p\right) : L_2[a,b] \to R^p$ і $J = col\left(J_1, \quad J_2, \quad \ldots, \quad J_p\right) : L_2[a,b] \to R^p$ — обмежені лінійні векторні функціонали, $l_\nu, J_\nu : L_2[a,b] \to R$, $\nu = \overline{1,p}$, $\alpha = col\left(\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p\right) \in R^p$, $\varepsilon << 1$ — малий параметр.

Використовуючи методи теорії слабкозбурених операторних крайових задач з нетеровою лінійною частиною [1], [2], знайдено умови біфуркації розв'язків крайової задачі (1), (2). Побудовано сім'ю розв'язків задачі (1), (2) у вигляді сингулярного в точці $\varepsilon = 0$ ряду, який збігається при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

[1] Boichuk A. A., Samoilenko A. M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.* – Utrecht, Boston: VSP, 2004. – 317 p.; 2nd edition, Berlin: De Gruyter, 2016. – 314 p.

[2] Вишик М. И., Люстерник Л. А. *Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений* // УМН. – 1960. – **15**, вып. 3. – С. 3–80.

Іванна Бондар

Крайова задача для інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. Некритичний випадок

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: holovatska.iv@gmail.com

Розглянемо крайову задачу для систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds = f(t), \tag{1}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha. \tag{2}$$

Будемо використовувати припущення і позначення з [1], де: $A(t), B(t),\ \Phi(t)$ — $(m \times n)$, $(m \times n)$, $(n \times m)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a, b]$; вектор-стовпці матриці $\Phi(t)$ — лінійно-незалежні на $[a, b]$, $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція з $L_2[a, b]$; $\ell = col(\ell_1, \ell_2, ..., \ell_q)$ — лінійний обмежаний q-вимірний векторний функціонал, $\alpha = col(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q) \in R^q$.

Розв'язок $x(t)$ крайової задачі (1)–(2) шукаємо у наступному класі вектор-функцій $x(t) \in D_2([a, b], \dot{x}(t) \in L_2[a, b]$, $t \in [a, b]$.

Дотримуючись раніше введеної класифікації крайових задач, введемо наступне означення.

Означення. *Крайові задачі* (1), (2), *для яких відповідні їм лінійні однорідні крайові задачі*

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds = 0, \tag{3}$$

$$\ell x(\cdot) = 0 \tag{4}$$

не мають (мають) нетривіальні розв'язки, називаються ***некритичними (критичними)***.

Таким чином, випадки крайових задач, для яких виконується одна із умов $rankQ = q$ або $rankQ < q$ є, відповідно, некритичним або критичним [1], де Q — $q \times r_1$-вимірна матриця [2], отримана підстановкою у крайову умову нормальної фундаментальної матриці $X(t) = X(t,a)$, $X(a) = E$ системи $Q = \ell X(\cdot)$.

Коли розглядаємо некритичний випадок, тобто $rankQ = n_2 = q$, то $rankP_Q = q - rankQ = 0$, отже $P_Q = 0$, а це доводить справедливість наступного твердження.

Теорема. (Некритичний випадок) *Якщо* $rankQ = n_2 = q$, *то однорідна крайова задача* (3), (4) *має лише тривіальний розв'язок.*

Неоднорідна імпульсна крайова задача (1), (2) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли* $f(t) \in L_2[a,b]$, $\alpha \in R^q$ *задовольняють умову*

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_d} \Big\{ \alpha - \ell F(\cdot) \Big\} = 0, \tag{5}$$

$$d_1 = m - rankD, \; d = q - m + n - rankD$$

і при цьому має єдиний розв'язок

$$x(t) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \Big(\alpha - \ell F\,(\cdot) \Big) + F(t), \tag{6}$$

$$r_1 = m + n - rankD,$$

визначених у класі вектор-функцій $x(t) \in D_2([a,b]), \; \dot{x}(t) \in L_2[a,b], \; t \in [a,b]$.

Таким чином, розглянуто крайову задачу для системи інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром та встановлено умову існування єдиного розв'язку.

[1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems.* – Utrecht, Boston: VSP, 2004. – 317 p.; 2nd edition, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016. — 314 p.

[2] Бойчук О.А., Головацька І.А. *Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь* // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, 4. – С. 460-474.

Яна Варга

Параметризація для дослідження розв'язків деяких інтегральних крайових задач

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна
E-mail: iana.varga@uzhnu.edu.ua

Розглядається нелінійна інтегральна крайова задача

$$\frac{du(t)}{dt} = f\left(t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$\int_a^b g(s, u(s))ds = d. \tag{2}$$

де функції $f : [a,b] \times D \times D' \to \mathbb{R}^n$, і $g : [a,b] \times D \to R^n$ задовольняють умову Ліпшиця, $d-$ заданий $n-$ вимірний вектор. Області D_a і D_b опуклі підмножини $\mathbb{R}^n$, де шукаємо значення $x(a)$ і $x(b)$ розв'язку даної крайової задачі, відповідно.

Задача полягає у знаходженні розв'язку системи диференціальних рівнянь (1), який задовольняє інтегральні крайові умови (2) у класі неперервних функцій $x : [a,b] \to D$ з початковим значенням $x(a) \in D_a$. Область D буде визначатися за допомогою лінійної комбінації підмножин D_a і D_b. Обґрунтовано зведення вихідної інтегральної крайової задачі до двоточкової за допомогою належної параметризації крайових умов. Крайова задача (1), (2) пов'язується зі спеціальною параметризрваною послідовностю функція $x_m(t,z,\eta)_{m=0}^{\infty}$, що задовольняє крайовим умовам $x(a) = z$, $x(b) = \eta$ для всіх $z, \eta \in \mathbb{R}^n$. Доводиться рівномірна збіжність послідовності функції, згадана вище, до певної граничної функції $x_\infty(t,z,\eta) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z,\eta)$. Встановлено зв'язок граничної функції з розв'язком вихідної крайової задачі.

[1] Ronto A., Ronto M. and Varha Y. *A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems* // Applied Mathematics and Computation. – 2015. – **250**. – C. 689–700.

[2] 8) Ronto A., Ronto M. and Varha Y. *On non-linear boundary value problems and parametrization at multiple nodes* // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2017. – 80. – C. 1 - 18.

[3] Varga I. *On investigation of some non-linear integral boundary value problem* // Miskolc Mathematical Notes. – 2018. – **19**, 2. – C. 1221 - 1229.

Ганна Вережак

Про нелокальну задачу для одного сингулярного рівняння параболічного типу

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
E-mail: g.verezhak@gmail.com

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{dt} = (-1)^{b-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^b u(t,x),$$

$$(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}_+ \equiv \Omega, \tag{1}$$

де $b \in \mathbb{N}$, $\nu > -1/2$ – фіксовані параметри. Для рівняння (1) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$ рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f,\ f \in (\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta)', \tag{2}$$

де $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$, $\alpha,\beta > 0$, – простір, який складається з парних на $\mathbb{R}$ функцій простору S_α^β (про простори S_α^β див. в [1]), границя розглядається в просторі $(\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta)'$, топологічно спряженому з простором $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ (конкретні значення параметрів $\alpha,\beta > 0$, вкажемо пізніше), $\{\mu,\mu_1,...,\mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1,...,t_m\} \subset (0,T]$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані параметри, причому $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le T$. Із результатів, наведених в [2] випливає, що задача (1), (2) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою $u(t,x) = G(t,x) * f := \langle f_\xi, T_x^\xi G(t,x)\rangle \equiv \langle f_\xi, T_\xi^x G(t,\xi)\rangle$, $(t,x) \in \Omega$, де T_x^ξ – оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [2],

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\sin^{2\nu}\omega d\omega,$$

$$b_\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)},$$

$G(t,\xi) = F^{-1}_{B_\nu}[Q(t,\sigma)](\xi), Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma), Q_1(t,\sigma) = \exp\{-t\sigma^{2b}\}$, $Q_2(\sigma) = (\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k\sigma^{2b}\})^{-1}$ (тут $F^{-1}_{B_\nu}$ – обернене перетворення Бесселя), при цьому $\{u(t,\cdot), G(t,\cdot)\} \subset \overset{\circ}{S}{}^{1/p}_{1-1/p}$, $p = 2b$, при кожному $t \in (0,T]$. Отже, в умові (2) $\alpha = 1 - 1/p$, $\beta = 1/p$.

Наприклад, якщо розглядати двоточкову задачу ($m = 1$, $\mu > \mu_1$, $t_1 = T$) для рівняння (1) з параметром $b = 1$ та $f = \delta$ (δ – дельта-функція Дірака), то розв'язок дається формулою

$$u(t,x) = \delta * G(t,x) = G(t,x) = 2^{-(2\nu+1)}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)[t^{-(\nu+1)}\times$$

$$\times \exp\{-\frac{x^2}{4t}\} + \sum_{r=1}^{\infty}(\frac{\mu_1}{\mu})^r \frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}} \exp\{-\frac{x^2}{4(t+rT)}\}].$$

Тоді

$$u(t,0) = 2^{-(2\nu+1)}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)[t^{-(\nu+1)} + \sum_{r=1}^{\infty}(\frac{\mu_1}{\mu})^r \frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}}].$$

Звідси дістаємо, що $u(t,0) \to +\infty$ при $t \to +0$, тобто розв'язок $u(t,x)$ задачі (1), (2) при деяких значеннях x при $t \to +0$ може бути необмеженою функцією. Тому постає задача: виділити клас X' узагальнених функцій та множину $M \subset \mathbb{R}$ зміни аргумента x такі, що $\sup\limits_{t\in[0,T]} |u(t,x)| \leq c$, $c = c(N) > 0$. Основний результат містить наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$ – розв'язок задачі* (1), (2) *з функцією f в умові* (2)*, яка є елементом простору $(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/p})' \subset (S^{1/p}_{1-1/p})'$, $\beta > 1$, suppf (носій f) – обмежена множина в $\mathbb{R}$, $[c,d] \cap$ suppf $= \emptyset$. Тоді $\exists \alpha > 0 : \sup\limits_{t\in[0,T]} |u(t,x)| \leq \alpha$, $\alpha = \alpha(c,d) > 0$, $x \in [c,d]$.*

Наприклад, у випадку розглянутої двоточкової задачі *supp* $\delta = \{0\}$ і для всіх $x \in [c,d] \subset (0,+\infty)$ справджується нерівність: $\sup\limits_{t\in[0,T]} |u(t,x)| \leq \alpha$, де $\alpha = 2^{-(2\nu+1)}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)((\frac{4(\nu+1)}{c^2})^{\nu+1} + \frac{\mu_1}{T^{\nu+1}(\mu-\mu_1)})$.

[1] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Пространства основных и обобщенных функций.* – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

[2] Городецький В.В., Вережак Г.П. *Нелокальна за часом задача для еволюційних сингулярних рівнянь нескінченного порядку* // Доп. НАН України. – 2018. – №8. – С. 3-11.

Катерина Геселева

Побудова наближених розв'язків інтегро-функціональних рівнянь з додатковими умовами колокаційно-ітеративним методом

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: geseleva1702@gmail.com

У просторі $L_2[a,b]$ розглядається інтегро-функціональне рівняння вигляду

$$y(x) = f(x) + p(x)y(h(x)) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt,\ x \in [a,b] \tag{1}$$

з умовою

$$y(x) = 0,\ x \notin [a,b] \tag{2}$$

та додатковими умовами (обмеженнями)

$$\int_a^b \Phi_i(t)y(t)dt = \alpha_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

де $f : [a,b] \Rightarrow R$, $K : [a,b]^2 \Rightarrow R$ – задані, а $y : [a,b] \Rightarrow R$ – шукана функція, $\Phi_i : [a,b] \Rightarrow R$ і $\alpha_i \in R$, $i = \overline{1,m}$ – відомі система лінійно-незалежних функцій та множина дійсних чисел відповідно.

Щодо функцій $p(x)$, $h(x)$ та $K(x,t)$ вважаємо, що вони відповідно на проміжку $[a,b]$ та в квадраті $[a,b]^2$ задовольняють певним умовам [1].

Ідея колокаційно-ітеративного методу [2] стосовно задачі (1)-(3), у випадку її сумісності, полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо на підставі формул

$$y_k(x) = u_k(x) + z_k(x),$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \xi_i(x),\ x \in [a,b],\ u_k(x) = 0,\ x \notin [a,b],$$

$$\int_a^b \Phi_i(x)y(x)dx = \alpha_i, i = \overline{1,m},$$

$$z_k(x) = f(x) + p(x)z_k(x)(h(x)) + \int_a^b K(x,t)(y_{k-1}(t) + w_k(t))dt,$$

$$w_k(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s^k \varphi_s(x),$$

$$w_k(x_i) = z_k(x_i) - z_{k-1}(x_i) = 0.$$

$x_i \in [a,b]$, $i = \overline{1,n}$ – вузли колокації.

У проведених дослідженнях отримано умови сумісності задачі, умови збіжності методу та оцінки похибок наближень.

[1] Геселева К.Г. *Колокаційно-ітеративний метод розв'язування інтегро-функціональних рівнянь з обмеженнями* // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. – 2018. – **Вип.** 18. – С. 55–65.

[2] Поселюжна В.Б., Семчишин Л.М. *Колокаційно-ітеративний метод розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь*. – Тернопіль: ТНЕУ, 2013. – 203 с.

Володимир Горбачук

Про розв'язки диференціальних рівнянь параболічного типу у банаховому просторі

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна
E-mail: v.m.horbach@gmail.com

Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ лінійних операторів у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|\cdot\|$. Розглянемо абстрактні параболічне та обернено параболічне рівняння

$$y'(t) - Ay(t) = 0 \quad \text{та} \quad y'(t) + Ay(t) = 0 \quad (t \in (-\infty, \infty)). \tag{1}$$

У випадку, коли $\mathfrak{B}$ – один із просторів $L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$, $C_0(\mathbb{R}^n)$ або $BUC(\mathbb{R}^n)$, а

$$Au(x) = \Delta u(x),\ x \in \mathbb{R}^n; \quad \mathcal{D}(A) = \{u \in \mathfrak{B} : \Delta u \in \mathfrak{B}\}$$

(Δ розуміється в сенсі розподілів), оператор A генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу в $\mathfrak{B}$ з кутом аналітичності $\theta = \frac{\pi}{2}$ (див. [1]), і першим в (1) є класичне рівняння теплопровідності.

Для оператора A і числа $\beta \geq 0$ покладемо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A), \quad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A), \quad C^{\infty}(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n),$$

$$\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \big| \exists c = c(x) > 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 : \|A^k x\| \leq c\alpha^k k^{k\beta}\}.$$

Простір $\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A)$ – банахів з нормою $\|x\|_{\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A)} = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^k x\|}{\alpha^k k^{k\beta}}$. В $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ ($\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$) вводиться топологія індуктивної (проєктивної) границі $\mathfrak{G}^{\alpha}_{\beta}(A)$. $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ та $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ - простори аналітичних та цілих векторів A.

Як показано в [2], для довільного $x \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ ($x \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$) вектор-функція $\exp(zA)x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k x}{k!}$ є цілою в $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ з $\beta < 1$ (в $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\beta \leq 1$), а сукупність $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює C_0-групу у цих просторах. Для C_0-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ маємо: $\forall x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, $\forall t \geq 0 : \exp(tA)x = e^{tA}x$. Якщо ж $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ обмежена аналітична, то ця рівність виконується для всіх $t \in \mathbb{R}^1$ (при $t < 0$, $e^{tA} := (e^{-tA})^{-1}$).

Під розв'язком рівняння з (1) розумітимемо неперервно диференційовну функцію $y(t) : (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$, що його задовольняє.

Теорема 1. *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$. Вектор-функція $y(t) : (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$ є розв'язком рівняння з (1) тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$y(t) = \exp(tA)g \quad \text{або} \quad y(t) = \exp(-tA)g),\ g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),\ t \in (-\infty, \infty),$$

відповідно. Отже, будь-який розв'язок $y(t)$ рівняння з (1) допускає продовження до цілої вектор-функції у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Нехай $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ - множина усіх цілих $\mathfrak{B}$-значних функцій. Функція $y \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ має скінченний порядок росту, якщо $\exists\gamma \geq 0 : \|y(z)\| \leq e^{|z|^\gamma}$ для достатньо великих $|z|$. Інфімум $\rho(y)$ таких γ - це порядок $y(z)$.

Для довільного фіксованого $\delta > 0$ степінь $y \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ відносно δ визначається як $\sigma(y, \delta) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}(\ln \max\limits_{|z|=r} \|y(z)\|)r^{-\delta}$. Якщо y має скінченний порядок $\rho = \rho(y)$ і $\delta < \rho$, то $\sigma(y, \delta) = \infty$, але $\sigma(y, \delta) = 0$ для $\delta > \rho$. Число $\sigma(y) = \sigma(y, \rho)$ називається типом $y(z)$. Зазвичай $y \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ скінченного порядку називають вектор-функцією експоненціального типу, якщо $\rho(y) \leq 1$ і $\sigma(y, 1) < \infty$.

Позначимо через $\mathfrak{A}^\rho(\mathfrak{B})(\rho > 0)$ множину всіх $y \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$, порядок яких не перевищує ρ, і скінченного степеня відносно ρ. Покладемо

$$\mathfrak{A}^\rho_\alpha(\mathfrak{B}) = \{y \in \mathfrak{A}^\rho(\mathfrak{B}) \big| \exists c = c(y) > 0, \forall z \in \mathbb{C} : \|y(z)\| \leq ce^{\alpha|z|^\rho}\}.$$

Множина $\mathfrak{A}^\rho_\alpha(\mathfrak{B})$ є банаховим простором з нормою $\|y\|_{\mathfrak{A}^\rho_\alpha(\mathfrak{B})} =$ $= \sup\limits_{r\geq 0} e^{-\alpha r^\rho} \max\limits_{|z|=r} \|y(z)\|$. У просторі $\mathfrak{A}^\rho(\mathfrak{B}) = \bigcup\limits_{\alpha>0} \mathfrak{A}^\rho_\alpha(\mathfrak{B})$ введемо топологію індуктивної границі просторів $\mathfrak{A}^\rho_\alpha(\mathfrak{B})$. Очевидно, що $\mathfrak{A}^1(\mathfrak{B})$ є не що інше, як простір $\mathfrak{B}$-значних функцій експоненціального типу.

Теорема 2. *Для того, щоб розв'язок $y(z)$ рівняння з (1) належав до $\mathfrak{A}^\rho(\mathfrak{B})$, необхідно і достатньо, щоб $y(0) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$,де $\beta = \frac{\rho-1}{\rho}$. За такої умови $y(z) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A), \forall z \in \mathbb{C}$. Якщо $\rho > \frac{\pi}{2\theta}$, то множина розв'язків $y \in \mathfrak{A}^\rho(\mathfrak{B})$ відповідного рівняння є щільною у множині усіх його розв'язків.*

[1] Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., and Neubrander F. *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 1999. – 437 p.

[2] Gorbachuk V.M. *On solutions of parabolic and elliptic type differential equations on $(-\infty, \infty)$ in a Banach space* // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, 2. – P. 177-183.

Василь Городецький, Руслана Колісник, Наталія Шевчук

Про одну нелокальну задачу для еволюційного рівняння з оператором диференціювання дробового порядку

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: r.kolisnyk@chnu.edu.ua

Досліджується еволюційне рівняння з оператором диференціювання дробового порядку вигляду

$$\partial u(t,x)/\partial x + (I - D_x^2)^{\omega/2} u(t,x) = 0, (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1}$$

де $\omega \in [1,2)$ – фіксований параметр. Використовуючи основну спектральну теорему для самоспряженого в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$ оператора id/dx, а також вигляд спектральної функції E_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, такого оператора (див. [?]):

$$(E_\lambda \varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \Big\} e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

встановлюємо, що $(I - D_x^2)^{\omega/2}\varphi = F^{-1}[a(\sigma)F[\varphi]]$, $\forall \varphi \in S_\beta^{1/\omega}$, де F, F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є, $a(\sigma) = (1+\sigma^2)^{\omega/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, тобто оператор $(I - D_x^2)^{\omega/2}$ співпадає з псевдодиференціальним оператором на просторі $S_\beta^{1/\omega}$ ($\beta \geq 1$ – фіксований параметр), побудованим за функцією-символом $a(\sigma)$, яка є мультиплікатором у просторі $S_{1/\omega}^{\beta}$ (про простори $S_{1/\omega}^{\beta}$ див. [?]). Під розв'язком рівняння (1) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка: 1) неперервно диференційовна по t при кожному $x \in \mathbb{R}$; 2) $u(t,\cdot) \in S_\beta^{1/\omega}$ при кожному $t \in (0,\infty)$; 3) $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (1). Для рівняння (1) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок $u(t,x)$ рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k u(t_k,\cdot) = f, \quad f \in (S_\beta^{1/\omega})', \tag{2}$$

де граничне співвідношення розглядається в просторі $(S_\beta^{1/\omega})'$, топологічно спряженому з простором $S_\beta^{1/\omega}$, $f \in (S_\beta^{1/\omega})'$ – згортувач у просторі $S_\beta^{1/\omega}$ (означення згортувача див. у [?]), $\{\mu, \mu_1, \dots \mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,\infty)$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані параметри, причому $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \infty$, $B_1,\dots,B_m$ – псевдодиференціальні оператори в просторі $S_\beta^{1/\omega}$, побудовані за функціями (символами) $g_k\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ відповідно: $B_k = F^{-1}[g_k F]$, $k \in \{1, \ldots, m\}$. Функції g_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, задовольняють умови: $g_k \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \sigma \in \mathbb{R} : g_k(\sigma) \leq \exp\{\varepsilon |\sigma|^\omega\},$$

$$\exists L_k > 0 \ \forall s \in \mathbb{N} \ \forall \sigma \in \mathbb{R} : |D_\sigma^s g_k(\sigma)| \leq L_k^s s^{\beta s}, k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Основні результати містять наступні твердження.

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *є розв'язною, розв'язок дається формулою*

$$u(t, x) = G(t, x) * f = \langle f_\xi, G(t, x - \xi) \rangle, (t, x) \in \Omega,$$

де $G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \sigma)](x)$,

$$Q(t, \sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\} \Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) \exp\{-t_k a(\sigma)\} \Big)^{-1},$$

при цьому $G(t, \cdot) \in S_\beta^{1/\omega}$ *при кожному* $t > 0$.

Теорема 2. *Нехай* $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, *– розв'язок задачі* (1), (2). *Тоді* $u(t, x) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *у просторі* $(S_\beta^{1/\omega})'$.

Теорема 3. *Нехай* $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, *розв'язок задачі* (1), (2) *з функцією* f *в умові* (2), *яка є елементом простору* $(S_\beta^\nu)' \subset (S_\beta^{1/\omega})'$, $\nu > 1$, *і* $\operatorname{supp} f$ *(носій* f*), обмежена множина в* $\mathbb{R}$. *Тоді* $u(t, x) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *рівномірно на* $\mathbb{R}$.

[1] Городецький В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. *Методы решения задач по функциональному анализу.* – К.: Выща шк., 1990. – 479 с.

[2] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Пространства основных и обобщенных функций.* – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

Тетяна Готинчан

Одне узагальнення математичної моделі задачі визначення виробничої програми фірми

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: t.hotynchan@chnu.edu.ua

Головне завдання підприємств — виробляти якомога більше своїх товарів високої якості та широкого асортименту, щоб якнайкраще задовольнити потреби споживачів, а тим самим підвищувати свою конкурентоспроможність на ринках збуту. Конкуренція є вагомим економічним важелем для них розширювати виробництво та покращувати якість продукції. А створення нових виробів може сприяти формуванню нових ринкових потреб, і таким чином розширенню ринку і своєї частки на ньому [1].

Найдоцільніше для створення виробничої програми підприємства використовувати апарат математичного моделювання. Моделювання дозволяє в короткі терміни отримати необхідні характеристики виробничої програми у залежності від кон'юнктури ринку. Серед першочергових проблем, для вирішення яких на рівні малих і середніх підприємств доцільно застосовувати економіко-математичне моделювання, зокрема є [2, 3]:

- визначення номенклатури продукції (або видів послуг), а також оптимізація обсягів виробництва на певний перспективний період;

- розподіл наявних матеріальних та фінансових ресурсів за видами діяльності;

- визначення ціни, яка забезпечуватиме необхідний (або оптимальний рівень прибутку);

- встановлення вимог до якості продукції (послуг);

- визначення впливу змін вартісних показників виробничих ресурсів і продукції на економічну ефективність підприємства тощо.

Існує низка загальновизнаних моделей, що дозволяють оцінити основні характеристики (прибутковість і ризик) виробничої програми підприємства: потрібно, виходячи з особливостей технологічних процесів фірми та наявних виробничих ресурсів знайти таку виробничу програму, яка забезпечувала б отримання максимального прибутку від реалізації виготовленої продукції. [3].

У [3] автор пропонує математичну модель виробничої програми фірми, у якій продукцію виготовляють з придбаної сировини. Причому за потреби сировину в процесі виробництва докуповують, а надлишки реалізують. Є підприємства, які на виготовлення продукції використовують як придбану, так і власну сировину. Причому деякі види сировини потребують додаткової переробки перед використанням у виробництві, що збільшує витрати фірми.

Розглядаються узагальнення математичних моделей оптимізації виробничої програми фірми за умов детермінованості та недетермінованості майбутніх цін на продукцію та виробничі ресурси [3], у яких задіяні як придбані, так і власні виробничі ресурси.

Відповідно до загальної теорії записуються оптимізаційні задачі (у випадку максимізації прибутку підприємства) визначення кількостей виготовлення продукції окремо з придбаної сировини та власної сировини з метою їх порівняння й можливості залучення додаткових заходів здешевлення виробничих ресурсів, а отже, й збільшення прибутку від реалізації продукції й надлишків ресурсів. Крім того, розглянуто методи побудови ваг для зведення багатокритеріальної оптимізаційної задачі до однокритеріальної із застосуванням методу Паретто-оптимальності у недетермінованому випадку.

[1] В. Гжещук *Суть конкуренції в ринковій економіці промислових підприємств* // Молодь і ринок. – 2014. – №3 (110). – С. 23 – 27.

[2] Жданов С.А. *Экономические модели и методы в управлении.* – М.: Дело и сервис, 1998. – 176 с.

[3] Кігель В.Р. *Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці: Монографія.* – К.: ЦУЛ, 2003. – 202 с.

Світлана Гринюк

Крайова задача для нелінійних диференціально-алгебраїчних систем з імпульсною дією

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна
E-mail: grinjuk.sv@gmail.com

Розглядається диференціально-алгебраїчна система рівнянь з імпульсною дією

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t) + f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad t, \tau_i \in [a,b], \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = B_i x(\tau_i) + b_i, \quad a \leq \tau_1 < \ldots < \tau_p \leq b, \tag{2}$$

підпорядкована лінійним багатоточковим крайовим умовам

$$A_1 x(t_1) + A_2 x(t_2) + \ldots + A_n x(t_n) = d, \tag{3}$$

де $A(t), B(t), B_i$ – $(n \times n)$-вимірні матриці, $i = \overline{1,p}$, $f(t,x)$ – n вимірна вектор-функція, $A_1, A_2, \ldots A_n$ – $(m \times n)$-вимірні сталі матриці, d – m-вимірний сталий вектор.

У випадку коли відповідна (1), (2) лінійна імпульсна система може бути зведена до центральної канонічної форми [1], розглядається можливість застосування чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для дослідження існування та наближеної побудови розв'язків крайової задачі (1)-(3). Встановлено конструктивні достатні умови існування розв'язків, побудовано послідовні наближення до точного розв'язку, одержано оцінки їх збіжності до точного розв'язку.

[1] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями.* – Київ: Вища школа, 2000, – 294 с.

[2] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием..* – Київ: Вища школа, 1987. – 288 с.

Іван Грод, Валерій Габресєв

Про регулярність лінійних розширень динамічних систем на многовидах

Тернопільський національний педагогічний університет, Тернопіль, Україна
E-mail: igrod@ukr.net, gabrusev@tnpu.edu.ua

Одна із важливих задач в якісній теорії диференціальних рівнянь є задача знаходження умов збереження інваріантних многовидів при збуреннях [1,3]. Ця задача тісно пов'язана з властивостями певного виду систем лінеаризованих по частині змінних. Такі системи диференціальних рівнянь, прийнято називати лінійним розширенням динамічної системи на многовидах.

Наша доповідь присвячена питанням дослідження існування і єдиності обмежених інваріантних многовидів для системи вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a\left(\varphi\right), \quad \frac{dx}{dt} = P\left(\varphi\right)x \; + f(\varphi),$$

де функції $a\left(\varphi\right), P\left(\varphi\right), f(\varphi)$ відповідної гладкості, визначені на торі T_m, $x \in R^k$.

При дослідженні таких систем виявилось надзвичайно важливим поняття функції Гріна задачі про обмежні многовиди [1] (функція Гріна-Самойленка), яке дало можливість отримати цілий ряд нових результатів.

Як один із ефективних методів дослідження питання існування функцій Гріна-Самойленка зарекомендував себе метод знакозмінних функцій Ляпунова, які розглядаються у вигляді квадратичних форм. Використовуючи зазначений підхід, отримано нові класи регулярних і слабо регулярних ситем заданого виду [2].

[1] Mitropolsky Yu., Samoilenko A., Kulik V. *Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems.* – London: Taylor Francis Group, 2003. – 400 c.

[2] Hrod, I.M., Kulyk, V.L. *Construction of Lyapunov Functions in the Form of Pencils of Quadratic Forms* // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2019. – **243**, 2. – pp. 183-191.

[3] Перестюк М. О., Слюсарчук В. Ю. *Оператор Гріна-Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь* // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, 7. – С. 948 – 957.

Андрій Громик, Іван Конет, Тетяна Пилипюк

Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних клиновидних циліндрах

Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: gapon74@gmail.com, konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

Розглядається задача побудови обмеженого на множині $D = \{(t,r,\varphi,z) \,|\, t > 0;\, r \in I_n^+ = \bigcup\limits_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup\limits_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}, R_j);\ \varphi \in (0;\varphi_0);\ 0 < \varphi_0 < 2\pi;\ z \in (-l_1; l_2),\ l_j \geq 0;\ l_1 + l_2 \neq 0\}$ класичного розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [1]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t,r,\varphi,z);$$

$r \in I_j;\ j = \overline{1, n+1}$ з відповідними початково-крайовими умовами та умовами спряження [2]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right]\Big|_{r=R_k} = 0;\ j = 1,2;\ k = \overline{1,n}.$$

Проаналізовано випадки задання на гранях клина $\varphi = 0$ та $\varphi = \varphi_0$ крайових умов Діріхле–Діріхле, Діріхле–Неймана, Неймана–Діріхле, Неймана–Неймана.

Щодо проміжку I_n^+ розглянуто випадки:

1) $R_0 = 0;\ R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (суцільний циліндр);

2) $R_0 > 0;\ R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (порожнистий циліндр).

Інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків досліджуваних параболічних початково-крайових задач спряження одержано методом класичних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна).

Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і вихідних даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах, які описуються циліндричною системою координат.

[1] Самойленко В.Г., Конет І.М. *Рівняння математичної фізики.* – Київ: ВПЦ "Київський університет 2014. 283 с.

[2] Конет І.М., Пилипюк Т.М. *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах.* – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2017. 80 с.

Герман Дзюбенко

Порядки копозитивного наближення періодичних функцій

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: dzyuben@gmail.com

Якщо неперервна на дійсній осі 2π-періодична функція f змінює свій знак у $2s$, $s \in \mathbb{N}$, точках $y_i : -\pi \le y_{2s} < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi$, а для інших $i \in \mathbb{Z}$, точки y_i визначаються періодично, то для кожного натурального n більшого деякої сталої $N(k, y_i)$, що залежить тільки від $k \in \mathbb{N}$ і $\min\limits_{i=1,\ldots,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, в [1] знайдено тригонометричний поліном P_n порядку $\le n$ такий, що: P_n має скрізь той самий знак, що і f, за винятком, можливо, маленьких околів точок y_i : $(y_i - \pi/n, y_i + \pi/n)$, $P_n(y_i) = 0$, $i \in \mathbb{Z}$, і

$$\|f - P_n\| \le c(k,s)\,\omega_k(f, \pi/n), \tag{1}$$

де $c(k,s)$ – стала, що залежить тільки від k і s, $\omega_k(f,\cdot)$ – модуль гладкості k-го порядку функції f і $\|\cdot\|$ – max-норма.

Зазначимо, що при "чисто" копозитивному наближенні (тобто, коли поліном змініє свій знак строго в точках y_i) оцінка (1) встановлена в [2] лише з ω_3 і її неможливо встановити з ω_k, $k \ge 4$, див. контрприклад в [3].

[1] Дзюбенко Г.А. *Оцінка Стечкіна для майже копозитивного наближення періодичних функцій* // Укр. Мат. Журн. – 2020. – **72**, 5. – С. 628-634.

[2] Dzyubenko G.A., Gilewicz J. *Copositive approximation of periodic functionsŭ* // Acta Math. Hungar. – 2006. – **120**, 4. – С. 301-314.

[3] Попов П. А. *Один контрприклад в знакозберігаючому наближенні періодичних функцій* // – К. : Збі-к пр. Ін-ту. матем. НАН України. 2005, **2**, № 2: Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання, ред. О. Степанець. сс. 336, 176-185.

Анастасія Дрожжина

Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: drozhzhina221b@gmail.com

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

де $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ - неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, Y_i дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_i}- деякий односторонній окіл Y_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Означення 1. *Розв'язок y диференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–розв'язком, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови*

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \ (j = \overline{0, n-1}),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n-2)}(t) y^{(n)}(t)} = \lambda_0.$$

Асимптотика таких розвязків при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, .., \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ досліджувалась в роботі (див.[1]).

Випадок, коли $\lambda_0 = 1$ є особливим при вивченні таких розв'язків і потребує окремого розгляду. Кожний $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, 1)$- розв'язок при $t \uparrow \omega$ задовольняє умови

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \dots \sim \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \ \text{ і } \ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \pm\infty.$$

Означення 2 *Будемо казати, що в диференціальному рівнянні (1) функція f задовольняє умову $(RN)_1$, якщо існують числа $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $t_0 \in [a, \omega[$, непрерервна функція $p : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ і непрервні правильно змінні при $z_j \to Y_j$ $(j = \overline{0, n-1})$ функції $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \to]0, +\infty[$ порядків σ_j $(j = \overline{0, n-1})$ такі, що для будь-яких непрервно диференційовних функцій $z_j : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_j}$ $(j = \overline{0, n-1})$, які задовольняють умови*

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_j(t) = Y_j, \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z_j'(t)}{z_j(t)} = \pm\infty \quad (j = \overline{0, n-1}),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{z_{j-1}'(t) z_j(t)}{z_{j-1}(t) z_j'(t)} = 1, \quad (j = \overline{1, n-1}).$$

має місце при $t \uparrow \omega$ зображення

$$f(t, z_0(t), ..., z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t))[1 + o(1)].$$

При виконанні цієї умови досліджуються питання про існування, асимптотику і кількість $P_\omega\,(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, 1)$- розв'язків рівняння (1).

[1] Євтухов В.М., Дрожжина А.В.. *Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.* // Український математичний журнал. – 2019. – 71, №12. – С. 1626-1646.

Ірина Дорошенко[1], *Тарас Лукашів*[1], *Ігор Юрченко*[1], *Володимир Ясинський*[2]

Стохастична різницева модель динаміки популяції з марковськими параметрами і перемиканнями

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: i.doroshenko@chnu.edu.ua, t.lukashiv@chnu.edu.ua, i.yurchenko@chnu.edu.ua
[2] *Едмонтон, Канада*
E-mail: yasinsk@list.ru

Стохастична різницева модель динаміки популяції описується стохастичним диференціально-різницевим рівнянням

$$dx(t) = diag(x_1(t), ..., x_n(t))([b(\xi(t) + A(\xi(t)))x(t)+$$

$$+B(\xi(t))x(t-\tau)]dt + \sigma(\xi(t))dw(t)), t \in R_+ \setminus T \tag{1}$$

з марковськими перемиканнннями

$$\Delta x(t) = g(t_k-, \xi(t_k-), x(t_k-), \eta_k),$$

$$T := \{t_k \uparrow, k = 0, 1, ...\}, \lim_{k\to\infty} = +\infty, \tag{2}$$

із початковими умовами

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0], h > 0, \varphi \in \mathbf{D},$$

$$\xi(0) = y \in Y, \eta_0 = h \in H. \tag{3}$$

Тут $\xi(t)$ - ланцюг Маркова із значеннями у скінченному просторі $Y := = \{y_1, ..., y_N\}$ з генератором $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N\times N}$; $\{\eta_k, k \geq 0\}$ - ланцюг Маркова зі значеннями у вимірному просторі $(H, \mathfrak{H})$ і перехідною ймовірністю на k-му кроці $P(y, H) = P(\eta_k \in H|\eta_{k-1} = y), y \in H, H \in \mathfrak{H}$; $w(t), t \geq 0$, - n-вимірний вінерівський процес. Процеси ξ, η, w є незалежними в сукупності; $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}([-h, 0], R^n)$ - простір Скорохода неперерних справа функцій, які мають лівосторонні границі з нормою $\|\varphi\| = sup_{-h\leq\theta<0} = |\varphi(\theta)|$, b - вектор розмірності n, а A, B, σ - квадратні $n \times n$ - матриці.

Квадратична залежність від x в рівнянні (1) є характеристикою динаміки популяції.

Обгрунтовано коректність моделі, яка описується системою (1)-(3), для якої встановлено достатні умови невід'ємності та обмеженості розв'язку.

[1] Ясинський В. К., Лукашів Т. О. *Стабілізація стохастичних дифузійних динамічних систем випадкової структури.* – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т., 2013. – 136 с.

[2] Mariton M. *Jump Linear Systems in Automatic Control.* – New York: Marcel Dekker, 1990. – 298 c.

[3] Yuan C., Mao X., Lygeros J. *Stochastic hybrid delay population dynamics: Well-posed models and extinction* // Journal of Biological Dynamics. – 2009. – **Vol. 3**, Iss. 1. – P. 1-21.

Олександр Дяченко[1], *Валерій Лось*[2]

Про деякі мішані задачі для параболічних за Петровським систем у просторах Хермандера

[1]*Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер", Київ, Україна*
E-mail: ol_v_dyachenko@ukr.net
[2]*Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна*
E-mail: v_los@yahoo.com

Доповідь присвячено застосуванню гільбертових анізотропних просторів Хермандера до мішаних неоднорідних задач для параболічних за Петровським систем диференціальних рівнянь другого порядку. Ці простори параметризуються парою дійсних чисел s, $s/2$ та вимірною за Борелем функцією $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, яка повільно змінюється на нескінченності за Карамата. Остання властивість означає, що $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \to 1$ при $r \to +\infty$ для кожного $\lambda > 0$. Функціональний параметр φ дозволяє більш тонко охарактеризувати регулярність функцій, ніж це дозволяє зробити соболєвська шкала. Раніше у просторах Хермандера було досліджено загальні параболічні крайові задачі для одного рівняння [1] і крайові задачі для параболічних за Петровським систем рівнянь з однорідними початковими даними Коші [2].

Гільбертів простір Хермандера $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів w на $\mathbb{R}^{n+1}$ таких, що

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(1 + |\xi|^2 + |\eta|\right)^s \varphi^2 \left((1 + |\xi|^2 + |\eta|)^{1/2}\right) |\widehat{w}(\xi, \eta)|^2 \, d\xi d\eta < \infty.$$

Тут $\widehat{w}$ є перетворення Фур'є розподілу w, а $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\eta \in \mathbb{R}$ є частотними змінними, дуальними до просторової і часової змінних відповідно. Випадок $\varphi(\cdot) \equiv 1$ дає анізотропний простір Соболєва.

Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$; $\Omega := G \times (0, \tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Гільбертів простір $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ складається, за означенням, зі звужень усіх розподілів $w \in H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ на Ω. Гільбертів простір $H^{s,s/2;\varphi}(S)$ означається за допомогою спеціальних локальних карт на S [3].

Розглянемо у Ω початково–крайову параболічну за Петровським задачу:

$$\partial_t u_j(x,t) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \le 2} a_{j,k}^{\alpha}(x,t) \, D_x^{\alpha} u_k(x,t) = f_j(x,t) \qquad (1)$$

$$\text{для всіх} \quad (x,t) \in \Omega \quad \text{і} \quad j \in \{1, \ldots, N\};$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \le l_j} b_{j,k}^{\alpha}(x,t) \, D_x^{\alpha} u_k(x,t)\big|_S = g_j(x,t) \qquad (2)$$

$$\text{для всіх} \quad (x,t) \in S \quad \text{і} \quad j \in \{1, \ldots, N\};$$

$$u_j(x,t)\big|_{t=0} = h_j(x) \quad \text{для всіх} \quad x \in G \quad \text{і} \quad j \in \{1, \dots, N\}. \tag{3}$$

Тут всі числа $l_j \in \{0;1\}$; всі коефіцієнти $a^{\alpha}_{j,k}(x,t)$ і $b^{\alpha}_{j,k}(x,t)$ є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно. Покладемо $u := (u_1, \dots, u_N)$, $f := (f_1, \dots, f_N)$, $g := (g_1, \dots, g_N)$, $h := (h_1, \dots, h_N)$. Нехай $s > 2$ і $s \notin E := \{l + 3/2 : l \in \mathbb{N}\}$. Через $\mathcal{G}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ позначимо підпростір гільбертового простору

$$\bigl(H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega)\bigr)^N \oplus \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}(S) \oplus \bigl(H^{s-1;\varphi}(G)\bigr)^N$$

елементів (f,g,h), які задовольняють природні умови узгодження правих частин задачі (1)–(3). Якщо $s \in E$, простір $\mathcal{G}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ означається за допомогою інтерполяції.

Теорема 1. *Для довільних $s > 2$ і φ відображення*

$$(C^{\infty}(\overline{\Omega}))^N \ni u \mapsto (f,g,h),$$

де f, g та h визначені рівностями (1)–(3)*, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\bigl(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\bigr)^N \leftrightarrow \mathcal{G}^{s-2,s/2-1;\varphi}.$$

[1] Los V. M., Mikhailets V. A., Murach A. A. *Parabolic problems in generalized Sobolev spaces* // arXiv:1907.04283.

[2] Los V. M. *Systems Parabolic in Petrovskii's Sense in Hörmander Spaces* // Ukrainian Mathematical Journal. – 2017. – **69**, 3. – P. 426 – 443.

[3] Los V. M. *Anisotropic Hormander Spaces on the Lateral Surface of a Cylinder* // Journal of Mathematical Sciences (New York). – 2016. – **217**, 4. – P. 456 – 467.

Євгенія Євгеньєва

Локалізовані граничні дані із сингулярним загостренням у квазілінійних параболічних рівняннях

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ, Україна
E-mail: yevgeniia.yevgenieva@gmail.com

У циліндричній області $Q = (0, T) \times \Omega,\ 0 < T < \infty$, де $\Omega \subset R^n$ — обмежена область така, що $\partial\Omega \in C^2$, розглядається наступна початково-крайова задача:

$$\begin{aligned} &(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p u = 0, \quad p \geqslant q > 0, \\ &u(0, x) = u_0 \ \text{ в } \Omega, \ \ u_0 \in L^{q+1}(\Omega), \\ &u(t, x)\Big|_{\partial\Omega} = f(t, x), \end{aligned} \tag{1}$$

де f генерує граничну функцію з сингулярним загостренням, а саме:

$$f(t, x) \to \infty \quad \text{при } t \to T, \quad \forall\, x \in \ K \subset \partial\Omega, K \neq \emptyset. \tag{2}$$

Функція f називається локалізованим граничним режимом (S-режим), якщо

$$\overline{\Omega} \setminus \Omega_0 \neq \emptyset, \quad \text{де } \Omega_0 := \left\{ x \in \overline{\Omega} : \sup_{t \to T} u(t, x) = \infty \right\}$$

для довільного слабкого розв'язку u задачі (1). За допомогою варіації методу локальних енергетичних оцінок (див. [1] та посилання) було здобуто точні умови локалізації граничного режиму. Роботи [2, 3] присвячені дослідженню поведінки слабких розв'язків у випадку, коли область сингулярності $\Omega_0 \subset \partial\Omega$ (LS-режим). Було отримано точні оцінки граничного профілю розв'язків, а саме:

$$\sup_{t \to T} u(t, x) \leqslant \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

де функція ψ визначається характером загострення граничного режиму f.

У якості додатку до цих результатів досліджено наступне квазілінійне параболічне рівняння з нелінійним абсорбційним членом:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p u = -b(t, x)|u|^{\lambda-1}u, \quad (t, x) \in Q, \quad \lambda > p \geqslant q > 0, \tag{3}$$

Тут $b(t, x) \geqslant 0$ — вироджений потенціал абсорбції: $b(t, x) \to 0$ при $t \to T\ \forall\, x \in \Omega$. Залежо від поведінки функції b у роботах [2, 4] було отримано точні оцінки згори всіх слабких розв'язків рівняння (3) біля часу $t = T$ (граничний профіль розв'язків). Важливо підкреслити, що отримані оцінки не залежать від початкових та крайових даних та справедливі навіть для "великих" розв'язків рівняння (3) (якщо такі існують).

[1] Galaktionov V.A., Shishkov A.E. *Self-similar boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 135A (2005), 1195–1227.

[2] Shishkov A.E., Yevgenieva Ye.A. *Localized peaking regimes for quasilinear parabolic equations*, Mathematische Nachrichten. 292 (2019), no. 6, 1349–1374.

[3] Shishkov A.E., Yevgenieva Ye.A. *Localized blow-up regimes for quaislinear doubly degenerate parabolic equations*, Mathematical Notes, 2019, to appear.

[4] Yevgenieva Ye.A. *Propagation of singularities for large solutions of quasilinear parabolic equations*, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 15 (2019), no. 1, 131–144.

В'ячеслав Євтухов, Діана Дмитрашко

Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: evmod@i.ua, diana.dmytrashko@stud.onu.edu.ua

В монографії В. Маріча [1] розглянуто нелінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = f(x)\phi(y), \tag{1}$$

де $f(x)$ - неперервна додатна на проміжку $[a, +\infty)$ функція, правильно змінна при $x \to +\infty$, $\phi(y)$ - неперервна додатна в правому околі нуля, правильно змінна в нулі функція.

Означення 1. *Додатна функція ϕ називається правильно змінною на нескінченності, якщо вона є вимірною на півосі $[\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$, та існує таке число $\sigma \in (-\infty, +\infty)$, що для довільного $\lambda > 0$*

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\phi(\lambda y)}{\phi(y)} = \lambda^{\sigma}.$$

При цьому σ називається порядком (або показником) функції ϕ.

Правильно змінна функція L нульового порядку називається повільно змінною функцією на нескінченності.

Функція $\phi(y)$ називається правильно змінною в нулі, якщо $\phi\left(\frac{1}{y}\right)$ є правильно змінною функцією на нескінченності.

В [1] для рівняння (1) було встановлено наступний результат.

Теорема 1. *Для кожного розв'язку $y(x)$, що прямує до нуля при $x \to \infty$, для рівняння $y'' = x^{\sigma} L(x) y^{\lambda} L_1(y)$, де функції L і L_1 повільно змінюються на нескінченності і в нулі відповідно, при $x \to \infty$ виконується:*

а) при $\sigma > -2$,

$$y^{\lambda-1}(x) L_1(y(x)) \sim (1 + \sigma + \lambda)(\lambda - 1)^{-2} \left\{x^{2+\sigma} L(x)\right\}^{-1}$$

і розв'язок $y(x)$ є правильно змінним на нескінченності з показником $\frac{\sigma+2}{1-\lambda}$.

б) при $\sigma = -2$,

$$y^{\lambda-1}(x) L_1(y(x)) \sim \left\{(\lambda - 1) \int_a^x t^{-1} L(t) dt\right\}^{-1}$$

і розв'язок $y(x)$ є повільно змінним на нескінченності.

В подальшому в роботах В. М. Євтухова і його учнів, зокрема Л. О. Кирилової [2], розглянуто наступне рівняння

$$y'' = \alpha_0 f(x)\phi(y) \tag{2}$$

де $\alpha_0 \in [-1, 1]$, $f(x)$ - неперервна додатна на проміжку $[a, \omega)$ функція, $\omega \leq +\infty$, $\phi(y)$ - неперервна додатна в деякому околі Y_0, де Y_0 є або 0, або $\pm\infty$, і є правильно змінною функцією при $y \to Y_0$.

Для рівняння (2) у статті [2] було отримано умови існування і асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків.

Означення 2. *Розв'язок y рівняння* (2) *називається* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ - *розв'язком, де* $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, *якщо він визначений на проміжку* $[t_0, \omega[\subset [\alpha, \omega[$ *і задовольняє умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{або} \quad 0 \\ \text{або} \quad \pm\infty, \end{cases} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Результати, отримані для рівняння (2), були поширені в роботі В. М. Євтухова та А. М. Самойленка [3] на нелінійне диференціальне рівняння n-го порядку.

З використанням методик з монографії В. Маріча [1] і статті В. М. Євтухова та А. М. Самойленка [3] встановлено аналог Теореми 1 про існування та асимптотику необмежених розв'язків дифференціального рівняння другого порядку (2), які не є, взагалі кажучи, $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язками.

[1] V. Maric *Regularly variation and differential equations* SpringerVerlag. New York LLC (Seria : Lecture notes in mathematics, 1726).2000. 140 p.

[2] Евтухов В. М., Кирилова Л. О. *Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.* Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1053–1061.

[3] Евтухов В. М., Самойленко А. М. *Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями* . Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 5. С. 628–650.

Валерій Журавльов

Критерій розв'язності операторного рівняня з керуванням у банаховому просторі

Поліський національний університет, Житомир, Україна
E-mail: vfz2008@ukr.net

Нехай $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $z(t)$, визначених на скінченному проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у деякому банаховому просторі $\mathbf{B}_1$, $z(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbf{B}_1$ з нормою $|||z||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}$, а $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $f(t)$, визначених на тому ж проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у деякому банаховому просторі $\mathbf{B}_2$ з нормою $|||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$, а $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $u(t)$, визначених на тому ж проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у деякому банаховому просторі $\mathbf{B}_3$ з нормою $|||u||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|u(t)\|_{\mathbf{B}_3}$, $\mathbf{B}$ — банаховий простір векторів з сталими компонентами.

Розглянемо лінійне операторне рівняння з керуванням

$$(Lz)(t) = f(t) + (Hu)(t), \tag{1}$$

де $L : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ та $H : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — лінійні обмежені оператори.

Нехай оператор $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ — узагальнено оборотний, а отже нормально розв'язний, а його нуль-простір $N(L)$ та ядро $R(L)$ доповнювальні у банахових просторах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ та $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, відповідно. При цьому існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(L)$ та $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to Y_L$, де $Y_L = \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \ominus R(L)$ та обмежений узагальнано обернений оператор L^-.

Відомо, що нормально розв'язне операторне рівняння (1) має розв'язки для тих і лише тих правих частин, які задовольняють умову [1]

$$\mathcal{P}_{Y_L}\Big[f + Hu\Big] = 0. \tag{2}$$

Позначивши $B = \mathcal{P}_{Y_L} H$ з умови (2) отримаємо операторне рівняння

$$Bu = -\mathcal{P}_{Y_L} f. \tag{3}$$

Нехай $B \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ — узагальнено оборотний, а отже нормально розв'язний оператор. Тоді існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(B)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \to N(B)$, $\mathcal{P}_{Y_B} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to Y_B$, де $Y_B = \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \ominus R(B)$ та обмежений узагальнано обернений оператор B^-.

Операторне рівняння (3) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується умова [1]

$$\mathcal{P}_{Y_B}\mathcal{P}_{Y_L} f = 0, \tag{4}$$

за виконання якої воно має сім'ю розв'язків

$$u = \mathcal{P}_{N(B)}\hat{u} - B^-\mathcal{P}_{Y_L} f, \tag{5}$$

де $\hat{u}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$.

Таким чином для u з (5) умова розв'язності (2) операторного рівняння (1) буде виконуватись і воно буде мати сім'ю розв'язків

$$z = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{z} + L^-\Big[f + Hu\Big], \tag{6}$$

де $\hat{z}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Підставивши у (6) знайдене u з (5), отримаємо

$$\begin{aligned} z &= \mathcal{P}_{N(L)}\hat{z} + L^-\Big\{f + H\Big[\mathcal{P}_{N(B)}\hat{u} - B^-\mathcal{P}_{Y_L}f\Big]\Big\} = \\ &= \Big[\mathcal{P}_{N(L)}, \;\; L^-H\mathcal{P}_{N(B)}\Big]\begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \end{bmatrix} + L^-\Big[I_{\mathbf{B}_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)}} - HB^-\mathcal{P}_{Y_L}\Big]f, \end{aligned} \tag{7}$$

де $\hat{z} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\hat{u} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ — довільні елементи відповідних банахових просторів.

Теорема 1. *Нехай лінійні оператори* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ *та* $B \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$.

Тоді операторне рівняння з керуванням (1) розв'язне для тих і лише для тих $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$, *які задовольняють умову (4) за виконання якої воно має сім'ю розв'язків (7).*

При цьому воно має сім'ю допустимих керувань

$$u = \mathcal{P}_{N(B)}\hat{u} - B^-\mathcal{P}_{Y_L}f.$$

Отримані результати можуть бути застосовані при дослідженні крайових задач для різних класів операторних рівнянь.

[1] Бойчук А.А.,Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. *Нормально разрешимые краевые задачи.* — Киев: Нукова думка, 2019. – 628 с.

Ірина Зеленська

Задача Коші для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна
E-mail: Kopchuk@gmail.com

Методом істотно особливих функцій [1] побудовано асимптотичний розв'язок задачі Коші для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту виду:

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x), \tag{1}$$

де

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x)$$

$$\mathbf{A_0}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$Y(x,\varepsilon) = col(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon))$ – шукана вектор-функція, $H(x) = col(0,0,h(x))$ – задана вектор-функція, $a(x) = x\tilde{a}(x) = 4x$, $x = 0$–точка звороту, $b(x) = 4x - 24$, $h(x) = 5x + 3$.

Задано початкові умови для задачі (1)

$$Y(0,\varepsilon) = B_0(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\alpha_0 + B_0,$$

коли $\varepsilon \to 0$, $x \epsilon [0;5]$, α_0, B_0–довільні сталі.

Згідно з розробленою теорією [2], задачу досліджено у просторі безрезонансних розв'язків

$$\begin{gathered} R_{1k} = \alpha_{k1}(x,\varepsilon)U_1(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{k1}(x,\varepsilon)U_1'(t), \\ R_{2k} = \alpha_{k2}(x,\varepsilon)U_2(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{k2}(x,\varepsilon)U_2'(t), \\ R_{3k} = f_k(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}g_k(x,\varepsilon)\psi'(t), \\ R_{4k} = \omega_k(x,\varepsilon), \end{gathered} \tag{2}$$

де $\alpha_{ki}(x,\varepsilon), \beta_{ki}(x,\varepsilon), f_k(x,\varepsilon), g_k(x,\varepsilon), \omega_k(x,\varepsilon) \in C^\infty[0;5]$, $k = \overline{1;3}$. Тут функції $U_i(t), i = 1,2$ – функції Ейрі, $\psi(t)$ – істотно особлива функція.

Регуляризуча функція запишеться у вигляді:

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{4x}dx\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

Згідно з методом істотно особливих функцій, асимптотику розв'язку розширеної задачі, побудовано у вигляді ряду

$$\tilde{Y}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x), \varepsilon) = \tag{4}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left[\left[\sum_{k=1}^{2}\left[\alpha_{kr}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{kr}(x)\frac{dU_i(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right]\right]+\omega_{kr}(x)\right]$$
$$+\sum_{r=-2}^{\infty}\varepsilon^r\left[f_{kr}(x)\psi(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}g_{kr}(x)\frac{d\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right]+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_{kr}(x)$$

Теорема 1. *Нехай для (1) виконуються умови*

$$a(x)\equiv x\tilde{a}(x), b(x), h(x)\in C^{\infty}[0;5].$$

Тоді на цьому проміжку запропонованим методом можна побудувати єдиний розв'язок розширеної задачі (1) у просторі безрезонансних розв'язків (2) у вигляді асимптотичного ряду (4).

[1] Бобочко В.М., Перестюк М.О. *Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту.* – К: Наукова думка, 2002. – 310 с.

[2] Зеленская И.А. *Система сингулярно возмущенных уравнений с дифференциальной точкой поворота I рода* // Изв. вузов. Матем. – Рік. 2015, 3– С. 63–74.

Степан Івасишен

Життєвий і творчий шлях професора С.Д. Ейдельмана (01.09.1920–08.06.2005)

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна
E-mail: ivasyshen.sd@gmail.com

У доповіді коротко описується життєвий шлях та основні досягнення відомого українського математика, випускника Чернівецького університету, фундатора кафедри диференціальних рівнянь цього університету, засновника наукової школи з теорії рівнянь із частинними похідними, доктора фізико-математичних наук, професора С.Д. Ейдельмана.

Самуїл Давидович народився 1 вересня 1920 р. (за офіційними документами 3 січня 1921 р.) у м. Хмельницькому. Після закінчення середньої школи в 1938 р. вступив на фізико-математичний факультет Київського університету. З 1941 по 1946 р. служив у Радянській Армії, пройшов шлях від солдата до майора. Брав активну участь у боях з Німеччиною і Японією. Нагороджений 5 орденами та багатьма медалями. Демобілізувавшись у жовтні 1946 р., продовжив навчання на фізико-математичному факультеті Чернівецького університету, який закінчив у 1948 р.

У Чернівецькому університеті почав працювати в 1947 р. лаборантом. Після цього до 1963 р. пройшов усі сходинки викладацької роботи від асистента до професора і завідувача кафедри диференціальних рівнянь. Далі Самуїл Давидович – завідувач кафедри вищої математики Воронезького політехнічного інституту та професор кафедри диференціальних рівнянь із частинними похідними Воронезького університету (1963–1968), професор кафедри вищої математики Київського вищого інженерного радіотехнічного училища (1968–1993). З вересня 1993 р. до кінця життя він працював професором і завідувачем кафедри факультету комп'ютерних наук Міжнародного Соломонового університету та за сумісництвом провідним науковим співробітником відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України.

У 1953 р. С.Д. Ейдельман захистив кандидатську дисертацію "Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения". У 1959 р. – докторську дисертацію "Исследование по теории параболических систем".

Основною діяльністю С.Д. Ейдельмана протягом усього життя було викладання математики у вищих навчальних закладах. Практично кожного року він читав нові нормативні та спеціальні курси, намагаючись донести до слухачів своє бачення різних розділів теоретичної і прикладної математики. Він підготував та опублікував 17 навчальних посібників для студентів, створив свою наукову школу. Серед його учнів 5 докторів і 20 кандидатів наук, причому 17 з них є випускниками Чернівецького університету (серед них М.І. Матійчук, С.Д. Івасишен, М.В. Житарашу, В.Д. Репніков і Я.М. Дрінь захистили докторські дисертації).

Постійною пристрастю і природною потребою Самуїла Давидовича були щоденні заняття науковою роботою. Його основні праці присвячені теорії рівнянь з частинними похідними, особливо теорії параболічних систем, в якій він одержав ряд істотних результатів. Завдяки їм С.Д. Ейдельман став широко відомий серед фахівців-математиків.

Добре розуміючи те, що найцікавіші та найважливіші для практики результати можна отримати на стиках різних галузей науки, С.Д. Ейдельман успішно займався питаннями, безпосередньо зв'язаними з математичними моделями реальних об'єктів. Він одержав цікаві результати в теорії марковських стохастичних автоматів, теорії оптимальних дискретних кодів, задачах нечіткої оптимізації, теорії еволюційних ігор зближення, в застосуванні нескінченних ланцюгів Маркова до знаходження усереднених енергетичних спектрів імпульсних випадкових процесів цифрового магнітного запису.

С.Д. Ейдельман – сильний аналітик. Саме застосуванням тонких аналітичних методів одержані ним і його учнями найточніші результати.

Самуїл Давидович – автор 304 наукових праць. Серед них 5 монографій, більше десяти праць монографічного характеру, 4 авторські свідоцтва на винаходи.

Усе своє творче життя С.Д. Ейдельман присвятив математиці, теоретичній та прикладній, у єдності яких бачив особливу силу та красу. Його кредо в роботі з учнями і співробітниками – вимоглива підтримка та вдячність.

Світлана Іліка, Лариса Піддубна

Про апроксимацію нелінійних систем диференціально-функціональних рівнянь

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: ilika.svitlana17@gmail.com, l.piddubna@chnu.edu.ua

У даній роботі вивчаються схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядається початкова задача для диференціально-функціонального рівняння вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = L(t, x_t) + f(t, x_t), t \in [0, T], x_0 = \varphi, \tag{1}$$

де $L(t, \varphi) = \sum\limits_{k=0}^{p} A_k(t)\varphi(-\tau_k) + \int\limits_{-\tau}^{0} D(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta$ - лінійний функціонал, що найчастіше зустрічається в застосуваннях, $A_k(t), k = \overline{0, p} - n \times n$ неперервні функції при $t \in [0, T], D(t, \theta) - n \times n$ матрична функція, компоненти якої $d_{ij}(t, \theta)$ - неперервні за сукупністю змінних функції на $[0, T] \times [-\tau, 0]$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau; f : R \times C([-\tau, 0], R^n) \to R^n$ неперервна функція. У даній роботі схема апроксимації диференціально-різницевих рівнянь [1-3] поширюється на задачу (1).

Нехай $m, p \in N$ Поставимо у відповідність початковій задачі (1) задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \tfrac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^{p} A_i(t) z_{l_i}(t) + \tfrac{\tau}{m} \sum_{i=0}^{m-1} D(t, -\tfrac{\tau(m-k)}{m}) z_{m-i}(t) + f(t, \sum_{i=1}^{m} z_i\chi_i), \\ \tfrac{dz_j(t)}{dt} &= \tfrac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)), j = \overline{1, m}, t \in [0, T], \end{aligned} \tag{2}$$

$$z_j(0) = \varphi(-\frac{\tau j}{m}), j = \overline{0, m}, \tag{3}$$

де індекси l_i визначаються рівностями $l_i = [\frac{m\tau_i}{\tau}]$,

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & \theta \in [-\frac{i\tau}{m}, -\frac{(i-1)\tau}{m}], \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases}$$

Теорема 1. *Якщо $A_k(t), k = \overline{0, p}, D(t, \theta)$ - неперервні матричні функції при $t \in [0, T], \theta \in [-\tau, 0]$, функція $f(t, \phi)$ неперервна і задовольняє умову Ліпшиця $|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| \le L|\varphi_1 - \varphi_2|, L > 0$, тоді для розв'язків початкової задачі (1) та розв'язків задачі Коші (2)-(3) справджуються співвідношення $\|x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)\| \to 0, j = \overline{0, m}, t \in [0, T]$ при $m \to \infty$ [3].*

Для ілюстрації наведених схем апроксимації диференціально- функціональних рівнянь в роботі розглядається модельний приклад початкової задачі

$$\frac{dx(t)}{dt} = -1.5x(t) - 1.25x(t-1) + x(t) sin x(t), t \in [0, 3],$$

$$x(t) = 10t + 1, t \in [-1, 0],$$

яка досліджувалася в праці [4] за допомогою блочних методів четвертого порядку.

Числові експерименти показують, що із ростом розмірності m апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь похибка наближень зменшується, що підтверджує теоретичні висновки з теореми.

[1] Репин Ю.М. *О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями* .// ПММ. – 1965. – **29**, №2. – С. 226-245.

[2] Черевко І.М., Матвій О.В. *Исследование схем аппроксимации дифференциально-разностных уравнений* // Math. Analysis, Differential Equations and Applications. – Sofia, 2011. – P. 301-312.

[3] Іліка С.А., Черевко І.М. *Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, №1. – С. 39-48.

[4] Cryer C. W. *Numerical methods for functional differential equations.* // Delay and Functional Differential Equations and their Applications. New York : Academic Press, 1972. P. 17-101.

Н. К. Ісмайлова, О. Д. Нуржанов

Наближене розв'язання крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра з багатоточковими крайовими умовами

Каракалпацький державний університет, Нукус, Узбекистан
E-mail: orinbay-nurjanov@mail.ru

Розглянемо нелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x + \int_0^t B(t,s)x(s)ds + f\left(t, x, \int_0^t \varphi(t,s,x(s))ds\right) \tag{1}$$

при лінійних багатоточкових крайових умовах

$$\sum_{i=0}^{p} A_i x(t_i) = d, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{p-1} < t_p = T, \tag{2}$$

де x, f, φ, d - точки n-мірного евклідового простору E_n; $A(t)$ і $B(t,s)$ - $n \times n$-мірні матриці, причому ці матричні функції і векторні функції f і φ визначені і неперервні в області $t \in [0,T]$, $0 \le s \le t \le T$, $x \in D$, $y \in D_1$; $D \subset E_n$, D_1 - куля простору E_n; A_i - $(n \times n)$-мірні стали матриці такі, що виконується умова

$$\det\left[\sum_{i=0}^{p} A_i \int_0^{t_i} R(t_i,s)ds\right] \ne 0.$$

Тут $R(t,s)$ - резольвентна матриця для матриць $A(t)$ і $B(t,s)$, що характеризують систему інтегро-диференціальних рівнянь (1).

Для дослідження розв'язків крайової задачі (1), (2) застосовується чисельно-аналітичний метод послідовних наближень [1]. Згідно зі схемою цього методу для побудови наближеного розв'язку крайової задачі (1), (2) використовується рекурентне співвідношення вигляду

$$\begin{gathered} x_m(t,x_0) = R(t,0)x_0 + \\ + \int_0^t R(t,\tau) f\left(\tau, x_{m-1}(\tau,x_0), \int_0^\tau \varphi(\tau,s,x_{m-1}(s,x_0))ds\right)d\tau + \\ + r(t)H\left[d - \sum_{i=0}^{p} A_i R(t_i,0)x_0 - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{p-1} A_i \int_0^{t_i} R(t_i,\tau) f\left(\tau, x_{m-1}(\tau,x_0), \int_0^\tau \varphi(\tau,s,x_{m-1}(s,x_0))ds\right)d\tau\right], \\ x_0(t,x_0) = R(t,0)x_0, \ m = 1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{3}$$

де

$$r(t)=\int\limits_0^t R(t,\tau)d\tau, \quad H=\left(\sum_{i=0}^{p} A_i \int\limits_0^{t_i} R(t_i,s)ds\right)^{-1}.$$

Установлюются умови збіжності послідовних наближень виду (3) до граничної функції і вивчається її зв'язок з точним розв'язком крайової задачі (1), (2).

[1] Самойленко А. М., Ронто Н. И. *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.

Петро Каленюк[1], Зіновій Нитребич[1],
Михайло Симотюк[2]

Багатоточкова задача з рівновіддаленими вузлами для рівняння із частинними похідними у необмеженому шарі

[1] *Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна*
E-mail: pkalenyuk@gmail.com, znytrebych@gmail.com,
[2] *ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України, Львів, Україна*
E-mail: mykhaylo.m.symotiuk@gmail.com

Нехай $T > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $\Pi(T) = \{(t,x) \in (0,T), x \in \mathbb{R}^p\}$, $D_x = \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$. Розглядаємо таку задачу [2, 3]:

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, A^{n-j}\,(D_x)\,\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} = 0, \quad (t,x) \in \Pi(T), \tag{1}$$

$$u(jt_0, x) = \varphi_j(x), \quad t_0 = T/n, \quad j = 1, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{2}$$

де $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $A(\xi)$ – такий многочлен, що $A(\xi) \neq 0$ для всіх $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p$. Встановлено умови розв'язності задачі (1), (2) у просторах функцій, перетворення Фур'є яких за $x_1, \ldots, x_p$ має експоненційне спадання на нескінченності [1, 2, 3]. Ці умови виражаються у термінах властивостей характеристичного визначника $\Delta(\xi) = \det \|\exp(\lambda_q A(\xi) j t_0)\|_{j,q=1}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^p$, де $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – корені многочлена $L(\lambda, 1) \equiv \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j$. Доведено оцінки знизу для визначника $\Delta(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^p$.

[1] *Дубинский Ю.А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике // Успехи мат. наук. – 1982.– **37**, вып. 5 (227). – С. 97–137.

[2] Каленюк П.І., Нитребич З.М. *Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод.* – Львів: Вид-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2002. – 292 с.

[3] Пташник Б.И. *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

Інна Кальчук, Андрій Макарчук,
Тетяна Жигалло, Денис Караханов

Застосування диференціальних рівнянь в розробці ігор

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
[1] *E-mail: k.inna.80@gmail.com, andreymakarh2@gmail.com tetvas@ukr.net, den.karahanov@gmail.com*

В сучасному суспільстві інформаційних та комп'ютерних технологій доволі поширеним і, причому, доволі звичним явищем стали різні ігри, написані для комп'ютерів, мобільних телефонів і не тільки. Часто такі ігри мають різного роду імітацію фізичних процесів того чи іншого процесу. Здебільшого такі фізичні процеси або їх імітація відносно легко описуються за допомогою диференціальних рівнянь, їх систем, різних задач, що для них ставляться.

Комп'ютерні ігри можуть бути поділені по жанрах. Одними з найпопулярніших жанрів, як можна спостерігати в запасі середньостатистичних любителів, є, для прикладу, бойовики, пригодницькі ігри, різного роду симулятори. В даних жанрах дуже багато таких процесів та явищ, які в тій чи іншій мірі можуть бути описані, а потім і програмно реалізовані з використанням диференціальних рівнянь.

Одними з найпоширеніших процесів, які зустрічаються в комп'ютерних, та й не тільки в комп'ютерних іграх, є процеси, пов'язані з тілом, підкинутим під певним кутом до горизонту. Найпростішим способом їх опису є використання наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \\ \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt, \end{cases}$$

яка описує явище в площині. Провівши певні міркування та перетворення, видно, що розв'язком цієї системи є параметрично задана функція

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t, \\ y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

яку можна записати у явному вигляді $y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$.

Геометрично результат дає нам наступне: ми отримали спосіб опису траєкторії об'єкту, підкинутого під певним кутом до горизонту. Як було експериментально виявлено ще в 17-му столітті, побудована модель занадто груба: вона не достатньо адекватно відображає реальний процес, тому її можна покращити, для прикладу, врахувавши опір повітря

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta\frac{dx}{dt}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - \beta\frac{dy}{dt}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \end{cases}$$

В результаті ми знову ж отримали систему диференціальних рівнянь, яка, як показує практика, краще описує досліджуване явище, ніж система, розглядувана раніше. Поступово ускладнюючи математичну модель розглядуваного процесу, можна отримати все складнішу і складнішу систему диференціальних рівнянь та співвідношень з їх використанням, яка все краще, а тому й реалістичніше представлятиме досліджуване явище.

Щойно представлений приклад наводить на ряд питань. До найважливіших можна віднести наступні:

• Як знайти компроміс між складністю та точністю реалізації побудованої математичної моделі?

• Яка допустима точність та складність математичної моделі?

• Як знайти самий вдалий компроміс між складністю математичної моделі та точністю, з якою вона описує явище?

• Якими комп'ютерними засобами реалізація даних математичних моделей в комп'ютерних іграх буде оптимальною? Яку реалізацію вважати отпимальною?

• Як оцінити ресурси, які вимагатиме реалізація вказаної математичної моделі з використанням вибраного алгоритму та конкретних програмних та інших засобів?

Ціллю даного дослідження і була спроба дати відповіді на вказані та інші питання, які часто можуть виникнути при перенесенні певних явищ реального світу в комп'ютерну гру.

[1] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. *Вычислительные методы.* – СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 672 с.

[2] Шелл Д. *Гемдизайн.* – «Альпина Диджитал», 2019. – 550 с.

Іван Клевчук, Микола Гритчук

Біфуркація циклів параболічних систем із малою дифузією

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: i.klevchuk@chnu.edu.ua

Дослідимо існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із малою дифузією. Подібні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися, наприклад, у працях [1, 2].

Розглядається рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon \left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u\right] + (d_0 + ic_0)u^2\overline{u} \tag{1}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр.

Теорема 1. *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має періодичні відносно t розв'язки*

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)) + O(\varepsilon),$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)\,|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова $(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2$ при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Розглянемо систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u) \tag{3}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{4}$$

де ε – малий додатний параметр, $u \in \mathbb{R}^2$, функція $F(u, v)$ чотири рази неперервно диференційовна відносно своїх аргументів, $F(0, 0) = 0$, причому F має в нулі порядок малості вище першого, $A_0 a = i\omega_0 a$, $\omega_0 > 0$, $A_0^* b = -i\omega_0 b$, тут a і b – власні вектори матриць A_0 і A_0^* відповідно, для яких $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, матриця $A_0 + \varepsilon A_1$ має пару власних значень вигляду $\tau(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$, $\tau(0) = 0$, $\tau'(0) > 0$, $\omega(0) = \omega_0$, $D = diag(d_1, d_2)$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

У системі (3) зробимо заміну і зведемо до нормальної форми. Після застосування схеми доведення теореми 1 одержимо умови існування та стійкості циклів системи (3).

Досліджено біфуркацію циклів параболічної системи із запізненням та малою дифузією

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(\varepsilon)u_t + f(u_t, \varepsilon) \tag{5}$$

і періодичною умовою (2). Тут ε – малий додатний параметр, $u \in \mathbb{R}^n$, $L(\varepsilon) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ – лінійний неперервний оператор, $f : \mathbb{C} \times [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$, $f(\varphi, \varepsilon) = O(||\varphi||^2)$ при $||\varphi|| \to 0$, оператор f п'ять раз неперервно диференційовний відносно своїх аргументів, u_t – елемент простору $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$, заданий функцією $u_t(\theta, x) = u(t + \theta, x)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$. Припускається, що нульовий розв'язок системи (5) при $\varepsilon = 0$ асимптотично стійкий.

На систему (5) накладено умови, що забезпечують існування стійкого цикла при $D = 0$ і малих $\varepsilon > 0$. Тоді відповідна система рівнянь на многовиді буде автономною параболічною системою двох диференціальних рівнянь із малою дифузією. При певних умовах на матрицю D будуть існувати періодичні розв'язки системи на многовиді. Звідси випливає існування циклів системи (5). Одержано умови стійкості таких циклів.

[1] Klevchuk I.I. *Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument* // J. Math. Sci. – 2016. – **215**, 3. – P. 341–349.

[2] Klevchuk I.I. *Bifurcation of self-excited vibrations for parabolic systems with retarded argument and weak diffusion* // J. Math. Sci. – 2017. – **226**, 3. – P. 285–295.

Наталія Коренюк, Степан Івасишен

Про характеризацію розв'язків однорідних півпросторових задач Діріхле та Неймана для рівнянь типу Фоккера–Планка–Колмогорова нормального марковського процесу

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна
E-mail: nataturchina@gmail.com, ivasyshen.sd@gmail.com

С. Д. Ейдельманом і С.Д. Івасишеним запропоновано підхід Е-І, який дозволяє повністю характеризувати широкі класи U розв'язків параболічних рівнянь. Розв'язки з цих класів визначені в областях $\Pi_T := (0,t] \times \mathbb{R}^n$ і $Q_T := (0,T] \times \Omega$, де $T > 0$, Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$, і як функції просторової змінної x мають при $|x| \to \infty$ експоненціальний ріст максимально можливого порядку із залежним від часової змінної t типом. При реалізації підходу Е-І для класу U вирішуються такі питання : 1) за яких умов існує і є єдиним розв'язок із класу U; 2) якими є множини початкових значень (при $t = 0$) розв'язку і в якому сенсі розв'язок задовольняє початкову умову; 3) за яких умов правильне інтегральне зображення розв'язку через його початкові значення? Підхід Е-І багатократно реалізовувався багатьма авторами (див. огляд в [1]). Переважна більшість результатів цієї реалізації стосувалась визначених у Π_T і Q_T розв'язків параболічних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами. Якщо коефіцієнти рівнянь необмежено зростають при $|x| \to \infty$, то подібних результатів у літературі майже немає, а для випадку області Q_T зовсім немає.

Тим часом параболічні рівняння зі зростаючими коефіцієнтами виникають при математичному моделюванні реальних процесів (наприклад, у задачах теорії випадкових процесів, статистичної радіотехніки). Такими є рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова нормальних марковських процесів, у яких деякі коефіцієнти необмежено зростають при $|x| \to \infty$.

Доповідь присвячена наведенню результатів реалізації підходу Е-І для розв'язків в області $\Pi_T^+ := (0,T] \times \mathbb{R}^n_+$, де $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_n) | -\infty < x_j < \infty, j \in \{1, \ldots, n-1\}, x_n > 0\}$, рівняння

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \partial_{x_j} \partial_{x_l} u(t,x) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j \partial_{x_j} u(t,x) - a_0 u(t,x) -$$

$$-b \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} (x_j u(t,x)) = 0, (t,x) \in \Pi_T^+, \quad (1)$$

які задовольняють одну з крайових умов

$$B^{(l)} u(t,x)|_{x_n=0} = 0, l \in \{1,2\}. \quad (2)$$

У рівнянні (1) a_{jl}, a_j, a_0 і b – задані дійсні числа, причому $b \neq 0$, а матриця $A_0 := (a_{jl})_{j,l=1}^n$ симетрична та додатно визначена. В умовах (2) $B^{(1)} = 1$, а $B^{(2)} = \partial_{\vec{\nu}_{A_0}}$ – конормальна похідна для рівняння (1), коефіцієнти групи старших якого складають матрицю A_0.

У дослідженнях істотно використовуються результати побудови та вивчення властивостей однорідної функції Ґріна зі статті [2], а також методика, яка розроблена в працях з огляду в статті [1].

[1] Івасишен С. Д. *Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу* // Мат. студії.–2013.–**40**, № 2.–С. 172–181.

[2] Турчина Н. І. *Про вектор-функції Ґріна півпросторових задач Діріхле та Неймана для параболічних рівнянь другого порядку з особливостями і виродженнями* // Буковинський мат. журн.–2019.–**7**, № 2.–С. 117–132. https://doi.org/10.31861/bmj2019.02.117.

Наталія Коренюк[1], *Тоня Фратавчан*[2], *Галина Івасюк*[2]

Про модельну $\overrightarrow{2b}$-параболічну крайову задачу без початкових умов і теореми типу Ліувілля

[1] *Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна*
E-mail: nataturchina@gmail.com
[2] *Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: t.fratavchan@chnu.edu.ua, h.ivasjuk@chnu.edu.ua

Нехай $n, N, b_1, ..., b_n$– задані натуральні числа, $r_1, ..., r_m$ – невід'ємні цілі числа, s– найменше спільне кратне чисел $b_1, ..., b_n$, $x' = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$, $T \in \mathbb{R}$– довільно фіксоване число, $\Pi^+_{(-\infty,T]} := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \in (-\infty, T], x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$, $\Pi'_{(-\infty,T]} := \{(t,x') \in \mathbb{R}^n | t \in (-\infty, T], x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$.

В області $\Pi^+_{(-\infty,T]}$ розглядається крайова задача для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи рівнянь вигляду

$$\left(I_N \partial_t - \sum_{||k||=2s} a_k \partial_x^k\right) u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi^+_{(-\infty,T]},$$

$$\left(\sum_{||\overline{k}||=r_j} b_{j\overline{k}} \partial_{t,x}^{\overline{k}}\right) u(t,x)|_{x_n=0} = g_j(t,x'), \quad (t,x') \in \Pi'_{(-\infty,T]}, \tag{1}$$

$$j \in \{1, ..., Nb_n\},$$

де a_k і $b_{j\overline{k}}$ – сталі матриці відповідно розміру $N \times N$ і $1 \times N$, I_N– одинична матриця порядку N, k – n - вимірний мультиіндекс, $||k|| = \sum\limits_{j=1}^{n} (s/b_j) \cdot k_j$, $\overline{k} = (k, k_0)$ – $(n+1)$ - вимірний мультиіндекс, $||\overline{k}|| = 2sk_0 + ||k||$, для крайових умов виконується умова доповняльності.

Отримані такі результати : 1) для задачі (1) встановлено теорему про однозначну розв'язність у просторах Гельдера та інтегральне зображення розв'язків ; 2) для розв'язків задачі (1) з $f \equiv 0$ і $g_j \equiv 0$, доведено теореми типу Ліувілля (про визначення виду розв'язку за його асимптотичною поведінкою).

Сергій Кріль

Про нетривіальні нулі дзета-функції Рімана

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: krilso@i.ua

Досліджуються нетривіальні нулі дзета-функції Рімана. Ця функція для комплексних чисел $s = \sigma + it$ вперше досліджувалася Б. Ріманом [1]. При $\sigma > 1$ вона визначається як сума узагальненого гармонійного ряду, тобто

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h^{-s}.$$

У критичній смузі, тобто коли $0 < \sigma < 1$ цю функцію доцільно подати у вигляді [2; 3]

$$\zeta(s) = f(s) + \chi(s) f(1-s), \tag{1}$$

де $\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{-1}$, $f(s)$ – деякий аналітичний вираз.

На критичній прямій, тобто коли $\sigma = \frac{1}{2}$ для функції матиме місце представлення [4]

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = k(t) \exp^{i\varphi(t)} (1 + \exp^{-2i(\theta(t)+\varphi(t))}). \tag{2}$$

Виходячи з цього факту та властивостей функції $S(T)$ (аргументу дзета-функції Рімана на критичній прямій) показано, що майже усі нетривіальні нулі належать цій прямі. Зокрема, доведено, що на відрізку критичної прямої прямокутника $D = \{0 < \sigma < 1,\, 0 < t \leq T\}$, $N_0(T)$ кількість нетривіальних нулів буде рівна

$$N_0(t) = \frac{T}{2\,pi} \ln \frac{T}{2\,pi} - \frac{T}{2\,pi} + O(\ln T),$$

тоді, як поза цим відрізком у даному прямокутнику може бути не більше ніж $O(\ln T)$ нетривіальних нулів. Щодо останніх розглянуто деякі часткові випадки і для них отримано протиріччя. Зокрема, таким чином, доведено, що поза критичною прямою не може знаходитися скінченна кількість нетривіальних нулів.

[1] Риман Б. *О числе простых чисел, не превышающих данной величины: сочинения.* – Москва: ОГИЗ, 1948. – 543 с.

[2] Титчмарш Е.К. *Теория дзета-функции Римана.* – Москва: ИЛ, 1953. – 409 с.

[3] Edward H.M. *Riemann's Zeta Function.* – Acad: Press, 1974. – 317 с.

[4] Кріль С.О. *Поведінка дзета-функції Рімана на критичній прямій.* – Камянець-Подільський : КПНУ ім. І.Огієнка, 2020. – 53 с.

Олег Ленюк

Розв'язування задач математичної фізики методом гібридних інтегральних перетворень Бесселя-Ейлера-Бесселя на полярній осі

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: O.Lenyuk@chnu.edu.ua

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку з широким використанням композитних матеріалів, існує нагальна потреба у вивченні фізико-технічних характеристик таких матеріалів, що знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично призводить до задачі розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами.

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень.

Розглянемо задачу побудови обмеженого в області

$$D_2 = \{(t,r) : t > 0, r \in I_2\},\ \ I_2 = (R_0; R_1) \cup (R_1; R_2) \cup (R_2; \infty)$$

розв'язку сепаратної системи трьох диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{aligned} L_t[u_1] + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu_1,\alpha_1}[u_1] &= f_1(t,r),\ r \in (R_0; R_1), \\ L_t[u_2] + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B^*_{\alpha_3}[u_2] &= f_2(t,r),\ r \in (R_1; R_2), \\ L_t[u_3] + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\nu_2,\alpha_2}[u_3] &= f_3(t,r),\ r \in (R_2; \infty), \end{aligned} \tag{1}$$

з відповідними початковими умовами, умовами спряження та крайовими умовами [1-3].

При $R_0 = 0$ в цій точці виконується умова обмеження [1], при $R_0 > 0$ – стандартна крайова умова [2]. Якщо ж ми маємо так звані "м'які межі", то в крайові умови та умови спряження входить спектральний параметр [3]. У кожному із наведених випадків побудоване відповідне пряме та обернене гібридне інтегральне перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя, породжене на множині I_2 гібридним диференціальним оператором, доведені теореми про основну тотожність гібридного диференціального оператора [1-3].

Якщо $L_t = \frac{d}{dt}$, то ми маємо задачу теплопровідності або дифузії, якщо $L_t = \frac{d^2}{dt^2}$, то маємо задачу динаміки.

Усі параметри та оператори, які беруть участь у постановці крайової задачі для системи (1), описані у відповідних працях[1-3].

Пряме інтегральне перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя на полярній осі з двома точками спряження записується у вигляді операторної матриці-рядка. Вихідна система та початкові умови записуються в матричній формі, і ми застосовуємо операторну матрицю-рядок до заданої задачі за правилом множення матриць.

В результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого або другого порядку.

Обернене перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя записується у вигляді операторної матриці-стовпця, і ми застосовуємо його до побудованого розв'язку задачі Коші. Після здійснення певних перетворень ми отримуємо єдиний розв'язок вихідної задачі.

Побудовані розв'язки крайових задач мають алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

[1] Ленюк О.М. *Запровадження гібридного інтегрального перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя на полярній осі* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр.– Чернівці: Прут. – 2011. – Вип. 20. – С. 121-130.

[2] Ленюк О.М. *Запровадження гібридного інтегрального перетворення Бесселя-Ейлера-Беселля на полярній осі* $r \geq R_0 > 0$ // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут. – 2012. – Вип. 21(37). – С. 56-66.

[3] Ленюк О.М. *Гібридні інтегральні перетворення типу Бесселя-Ейлера-Бесселя на полярній осі із спектральним параметром в умовах спряження* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.– Чернівці: Прут. – 2010. – Вип.19. Частина 1. – С. 59-73.

Галина Лопушанська[1], *Андрій Лопушанський*[2]

Регулярний розв'язок оберненої задачі з інтегральною умовою для рівняння з дробовою похідною за часом

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна*
E-mail: lhp@ukr.net
[2] *Жешувський університет, Жешув, Польща*
E-mail: alopushanskyj@gmail.com

Вивчаємо задачу

$$D_t^\beta u - A(x,D)u = R_1(x)g(t) + R_2(x,t),\ (x,t) \in Q := \mathbb{R}^n \times (0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0) = F_1(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

визначення пари (u, R_1), де F_1, R_2, g, Φ_1, η_1 – задані функці, $A(x,D)u$ – лінійний еліптичний диференціальний вираз другого порядку, $D_t^\beta u$ – похідна Капуто-Джрбашяна порядку $\beta \in (0,1)$ функції u.

При $a > 0$ визначено [1] простори типу Шварца $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^\alpha v(x)| \le C_{\alpha,\delta}(v)e^{-(a-\delta)|x|^{\frac{1}{\gamma}}},\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\,\alpha,\ \forall\,\delta > 0\}$.

Нехай $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \big\{v \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) :$
$||v||_{k,(a)} = \max[||v||_{k,a}, ||Av||_{k,a}] < +\infty\ \forall k \in \mathbb{N}, k \ge 2\big\}$,
$C_{2,\beta}(\bar{Q}) = \{v, v_t \in C(\bar{Q}) :\ Av, D_t^\beta v \in C(Q)\}$, $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ – простір таких функцій $v \in C_{2,\beta}(\bar{Q})$, що $v(\cdot,t) \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ для кожного $t \in [0,T]$, $\big(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y)\big)$ – вектор-функція Гріна [2] задачі Коші (1), (2). Оцінки компонент вектор-функції Гріна одержані, зокрема, в [2,4]. При $n \ge 3$, наприклад, маємо

$|G_0(x,t,y,\tau)| \le \frac{C_0|x-y|^{2-n}}{t-\tau}e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}},$
$(x,t),(y,\tau) \in Q, (x,t) \ne (y,\tau),$

$|G_1(x,t,y)| \le \frac{C_0 t^{-\beta}}{|x-y|^{n-2}}e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}$, $x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]$, де c, C_0 – додатні сталі, $c < c_0 = (2-\beta)\left(\frac{\beta^\beta}{4}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}$ для $A(x,D) = \Delta$.

Вважаємо, що добутки коефіцієнтів оператора $A(x,D)$ і всіх їхніх похідних із функціями з $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ належать $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$,
$(A):\ g, \eta_1 \in C[0,T]$, $0 < g_{min} \le g(t) \le g_{max}$, $\eta_1(t) \ge 0$, $t \in [0,T]$,
$\int_0^T t^\beta \eta_1(t)dt \ne 0$.

Теорема 1. *За припущень $\gamma \ge 1$, $0 < aT^{\frac{\beta}{2\gamma}} \le c$, $R_2 \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$, $F_1, \Phi_1 \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ і умови (A) існує $T_0 \in (0,T]$ і єдиний розв'язок $(u, R_1) \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ задачі (1)-(3) для кожного $T \in (0,T_0]$.*

Нехай $C_b(\mathbb{R}^n)$ – простір обмежених функцій в $\mathbb{R}^n$, $C_0(\mathbb{R}^n)$ – простір неперервних функцій із $C_b(\mathbb{R}^n)$, які спадають до нуля на нескінченності, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \{v \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap W^2_{q,loc}(\mathbb{R}^n)\,(q > n) : Av \in C_0(\mathbb{R}^n)\}$, $\mathcal{M}(Q) = \{v \in C_{2,\beta}(\bar{Q}) : v(\cdot, t) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\ \ \forall t \in [0, T]\}$.

Теорема 2. *За умов $F_1, \Phi_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $R_2 \in \mathcal{M}(Q)$ і (A) існує $T_0 \in (0, T]$ і єдиний розв'язок $(u, R_1) \in \mathcal{M}(Q) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ задачі (1)–(3) для кожного $T \in (0, T_0]$.*

Одержано зображення розв'язку задачі. Функція $R_1(x)$ виражається через u, u – розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду в $\bar{Q}$ при деякому $T \in (0, T_0]$. Знайшовши $R_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, матимемо розв'язок задачі (1), (2) у Q при довільному скінченному $T > 0$ у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)[R_1(y)g(\tau) + R_2(y,\tau)]dy + \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)F_1(y)dy,\ (x,t) \in \bar{Q}.$$

Подібні результати одержано для лінійного еліптичного диференціального виразу $A(x, D)u$ порядку $2b$ за умов [4].

[1] Гельфанд И.И. и Шилов Г.Е. *Пространства основных и обобщенных функций.* – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.

[2] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type.* – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004.

[3] Кочубей А.Н. *Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка* // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, 8. – С. 1359-1368.

[4] Матійчук М.І. *Про зв'язок між фундаментальними розв'язками параболічних рівнянь і рівнянь з дробовими похідними* // Буковинський математичний журнал. – 2016. – **4**, 3-4. – С. 101-114.

Андрій Макарчук, Денис Караханов, Костянтин Жигалло, Юрій Харкевич

Прикладне застосування полігармонічних рівнянь

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-mail: andreymakarh2@gmail.com, den.karahanov@gmail.com, zhyhallo@modulsoft.eu, kharkevich.juriy@gmail.com

Доволі багато процесів в самих різних областях науки можна описати за допомогою диференціальних рівнянь. Особливо добре це відчувається в таких науках, як фізика, хімія, астрономія тощо.

Теорія диференціальних рівнянь надзвичайно широка, а тому її засоби використовуються дуже широко у вирішенні найрізноманітніших задач, зокрема фізичних. Яскравим прикладом таких засобів є диференціальні рівняння в частинних похідних. За допомогою них описується досить широкий спектр задач, багато з яких мають прикладне застосування. Доволі цікавими в плані прикладного застосування є полігармонічні рівняння та їх системи. З їх використанням описуються доволі різноманітні задачі, багато з яких мають пряме або опосередковане прикладне застосування. Найпростішими представниками полігармонічних рівнянь є так звані гармонічні рівняння. Доволі відомим представником даної групи є так зване рівняння Лапласа $\Delta u = 0$.

За допомогою даного рівняння та різних крайових умовах накладених на нього описують різні фізичні задачі. Наведемо кілька прикладів. Для початку можна згадати задачу про установлений рух нестискуваної рідини. Можна показати, що даний процес можна описати наступним рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Накладаючи певні, для прикладу, граничні умови, отриману математичну модель є сенс використовувати в дослідженнях, пов'язаних з рухом рідини в певних конструкціях, наприклад, трубах.

Аналогічно можна описати деякі задачі, пов'язані з теплопровідністю. Рівняння Лапласа, аналогічне останньому, можна використовувати для опису ситуації, коли мається певне тверде тіло з установленою в ньому температурою. При глибшому дослідженні даної задачі є сенс накласти першу або другу крайові задачі (так звані задача Діріхле та задача Неймана, відповідно).

Неоднорідним випадком рівняння Лапласа є рівняння Пуассона, яке має наступний вигляд: $\Delta u = f$. Воно, як і рівняння Лапласа, має доволі широке застосування в фізиці. Наведемо деякі задачі, які можуть зводитися до обох вище згаданих рівнянь:

1. Задачі про стаціонарний розподіл температур в ізотропному тілі. При відсутності джерел або поглиначів тепла процес описується рівнянням Лапласа, при їх наявності — рівнянням Пуассона.

2. Задача про установлену течію нестискуваної рідини. При відсутності розподілених джерел чи стоків рух рідини опишеться рівнянням Лапласа, у випадку ж їх наявності — рівнянням Пуассона.

3. Потенціал електричного поля при відсутності зарядів описується рівнянням Лапласа, а при наявності — рівнянням Пуассона.

Варто відзначити, що з точки зору практичного застосування не менш цінними є рівняння з вищим порядком гармонічності. Яскравим прикладом є бігаромнійне рівняння. Мабуть, самим простим представником даного сімейства рівнянь є рівняння виду

$$\Delta^2 u = \Delta\Delta u = 0 \tag{1}$$

За допомогою цього рівняння, а точніше крайових задач, наприклад, задач Діріхле, застосованих до нього, може бути описана задача про прогин тонкої пластини, форма якої якраз задається задачею Діріхле. Отримана в результаті використання рівняння (1) як частини системи диференціальних рівнянь модель може використовуватися, для прикладу, при дослідженні надійності різних покриттів, що є доволі важливим аспектом, наприклад, в будівництві.

[1] Терентьев А. Г., Казакова А. О. *Численное решение краевых задач полигармонического уравнения* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – **52**, №11. – С. 2050-2059

[2] Микишанина Е. А. *Краевые задачи для неоднородных систем полигармонических уравнений с приложениями в теории тонких оболочек и пластин* // Вестник пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 4. – С. 136-144.

Ганна Малицька, Іван Буртняк

Системи Колмогорова

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника", Івано-Франківськ, Україна
E-mail: hanna.malytska@pnu.edu.ua, ivan.burtnyak@pnu.edu.ua

Ми досліджуємо структуру фундаментальних матриць розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) для вироджених параболічних систем типу дифузії з інерцією.

Нехай $n_j \in N, n \in N$, $n_1 \geq ... \geq n_p, p \in N$, $j = \overline{1,p}$. $x = (x_1, ..., x_p)$, $x_j = (x_{11}, ..., x_{nj}) \in R^{n_j}, \xi = (\xi_1, ..., \xi_p)$, $\xi_j \in R^{n_j}$, $n_0 = \sum\limits_{j=1}^{p} n_j$.

Розглянемо задачу Коші

$$Lu = \partial_t u\,(t,x) - \sum_{j=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{n_{j+1}} x_{jl}\partial_{x_{j+1}l} u\,(t,x) -$$

$$- \sum_{|k|\leq 2b} A_k\,(t,x) D^k_{x_1} u\,(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=\tau} = u_0(x), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T < +\infty, x \in R^{n_0}, \tag{2}$$

де система

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{|k|\leq 2b} A_k(t,x) D^k_{x_1} u(t,x), \tag{3}$$

рівномірно параболічна за Петровським в $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x), x \in R^{n_0}, 0 \leq t \leq T\}$, $(x_2, ..., x_p)$-параметри.

Нехай

$\rho_{1j}(t,\sigma,c) = \sum\limits_{\mu=1}^{k-2} \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} C_{1j\mu} + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sigma_{kj}, j = \overline{n_{k+1}, n_k}, k = \overline{2,p}$, $\rho_{ij} = \sigma_{1j}, n_2 \leq j \leq n_1$.

$\rho_1(t,\sigma,c) = (\rho_{11}, ..., \rho_{1n_2}, \sigma_{1n_2+1}, ..., \sigma_{1n_1})$

Теорема 1. *Якщо*

1)$\forall (t_0, x_0) \in \Pi_{[0,T]}$ *матриця* $\sum\limits_{|k|=2b} A_k(t_0,x_0)\rho_1^k$

комутує із $\sum\limits_{|k|=2b} A_k(t_0,x_0) \int\limits_\tau^t \rho_1^k(\beta,\sigma,c) d\beta$,

2) коефіцієнти $A_k(t,x)$ *обмежені і неперервні по* t, x; *рівномірно неперервні по* t *при* $|k| = 2b$, *задовольняють умову Гельдера по* x *з показником* $0 < \alpha \leq 1$ *рівномірно по* t, *то існує ФМРЗК* (1)-(2)

$$\Gamma(t,x;\tau,\xi) = G(t,x;\tau,\xi;\xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{R^{n_0}} G(t,x;\beta,\gamma,\gamma)\varphi(\beta,\gamma;\tau,\xi) d\xi,$$

де $G(t,x;\tau,\xi,\xi)$ *-ФМРЗК системи із замороженими коефіцієнтами,* φ*-шукана функція із* $L\Gamma = 0$.

[1] Malytska H. P. and Burtnyak I. V. *Degenerate parabolik systems of the diffusion type with inertia* // Journal of Mathematical Sciences – 2020. – **Vol. 249**, 3. – C. 355-368.

Ольга Мартинюк, Василь Городецький

Нелокальна за часом задача для одного класу псевдодиференціальних рівнянь з гладкими символами

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: alfaolga1@gmail.com

Дослідженням нелокальних задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи.

У роботі одержані важливі результати щодо коректної розв'язності та побудови розв'язків, сформульовано умови регулярності та нерегулярності крайових умов для диференціально-операторних рівнянь.

Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \varphi(i\partial/\partial x)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R} = \Omega, \tag{1}$$

де $\varphi(i\partial/\partial x) = F^{-1}[\varphi F]$ – псевдодиференціальний оператор у просторі $S_1^{1/\alpha}$, побудований за функцією-символом φ, F, F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є.

Під розв'язком рівняння (1) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, неперервно диференційовну за змінною t, $u(t,\cdot)\in S_1^{1/\alpha}$ при кожному $t>0$; $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, задовольняє рівняння (1).

Поставимо таку нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t_k,\cdot) = f, f\in (S_{1,*}^{1/\alpha})', \tag{2}$$

де граничне співвідношення розглядається в просторі $(S_1^{1/\alpha})'$, $m\in\mathbb{N}$, $\{\mu,\mu_1,\dots,\mu_m\}\subset (0,\infty)$, $\{t_1,\dots,t_m\}\subset(0,+\infty)$, – фіксовані числа, $0<t_1<\dots<t_m$, $\mu > m\sum_{k=1}^{m}\mu_k$, узагальнена функція f – згортувач у просторі $S_1^{1/\alpha}$.

Теорема 1. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (1), (2) коректно розв'язна. Розв'язок визначається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), \quad (t,x)\in\Omega,$$

де G – фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі для рівняння (1), $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, $Q_1(t,\sigma) = \exp(-t\varphi(\sigma))$, $Q_2 = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)\Big)^{-1}$ – мультиплікатор у просторі $S_{1/\alpha}^1$.

Досліджено поведінку розв'язку $u(t, \cdot)$ при $t \to +\infty$ (стабілізація розв'язку) у просторах типу S'.

Теорема 2. *Нехай* $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *– розв'язок нелокальної за часом задачі* (1), (2). *Тоді* $u(t,x) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *у просторі* $(S_1^{1/\alpha})'$.

Якщо узагальнена функція f в умові (2) є фінітною (тобто носій f $(\operatorname{supp} f)$ – обмежена множина в $\mathbb{R}$), то можна говорити про рівномірне прямування на $\mathbb{R}$ до нуля при $t \to +\infty$ розв'язку задачі (1), (2). Зазначимо, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторах типу S. Ця властивість випливає із загального результату, який відноситься до теорії досконалих просторів [1].

Теорема 3. *Нехай* $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *– розв'язок задачі* (1), (2) *із початковою функцією* f *в умові* (2), *яка є елементом простору* $(S_1^{\beta})' \subset (S_1^{1/\alpha})'$, $\beta > 1$, *і* $\operatorname{supp} f$ *– обмежена множина в* $\mathbb{R}$. *Тоді* $u(t,x) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *рівномірно на* $\mathbb{R}$.

[1] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

Ганна Маслюк

Про одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Гельдера

Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,
Київ, Україна
E-mail: masliuk@matan.kpi.ua

Нехай задано відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, цілі числа $m \geq 1$, $n \geq 0$ і $r \geq 2$ та дійсне число α таке, що $0 < \alpha \leq 1$. Введемо простори Гельдера $(C^{n,\alpha})^m := C^{n,\alpha}([a, b], \mathbb{C}^m)$ та $(C^{n,\alpha})^{m\times m} := C^{n,\alpha}([a, b], \mathbb{C}^{m\times m})$.

Зафіксуємо число $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо лінійну крайову задачу, для систем m диференціальних рівнянь r-го порядку, залежну від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), t \in [a, b], \tag{1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{2}$$

Тут для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$ є шуканою, а всі матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$, де $j \in \{1, \dots, r\}$, вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$, лінійний неперервний оператор $B(\varepsilon) : (C^{n+r,\alpha})^m \to \mathbb{C}^{rm}$ і вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ є довільно вибраними. Для крайової задачі (1), (2) введемо такі граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(0) Однорідна крайова задача при $\varepsilon = 0$ має лише тривіальний розв’язок.

(I) $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot, 0)$ у просторі $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$ для кожного номера $j \in \{1, \dots, r\}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ у просторі $\mathbb{C}^{rm}$ для довільної вектор-функції $y \in (C^{n+r,\alpha})^m$;

(III) $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot, 0)$ у просторі $(C^{n,\alpha})^m$;

(IV) $c(\varepsilon) \to c(0)$ у просторі $\mathbb{C}^{rm}$.

Означення. Розв’язок крайової задачі (1), (2) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$, якщо виконуються такі дві умови:

($*$) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$ та $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$, ця задача має єдиний розв’язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+r,\alpha})^m$.

($**$) З граничних умов (III) і (IV) випливає збіжність розв’язків $y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot, 0)$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$ при $\varepsilon \to 0+$.

Теорема 1. *Для того, щоб розв’язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежав від параметра ε при $\varepsilon = 0$ у просторі $(C^{n+r,\alpha})^m$ необхідно і достатньо, щоб ця задача задовольняла умову* (0) *і граничні умови* (I) *та* (II).

Також у роботі [1] доведено, що похибка і нев’язка цих розв’язків мають однаковий порядок малості при $\varepsilon \to 0+$ у відповідних просторах Гельдера.

Для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r = 1$, ці задачі було досліджено В. А. Михайлецем, О. О. Мурачем та В. О. Солдатовим у роботі [2].

[1] Masliuk H., Soldatov V. *One-dimensional parameter-dependent boundary-value problems in Hölder spaces*// Methods of Functional Analysis and Topology. – 2018. – **V. 24**, no. 2, P. 143 – 151.

[2] Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V. *Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems*// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2016. – no. 87, P. 1 – 16.

Олександр Матвій, Ірина Тузик, Ігор Черевко

Схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: omatviy@gmail.com, i.tuzyk@chnu.edu.ua , i.cherevko@chnu.edu.ua

У даній роботі досліджуються застосування схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь [1-3] до наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів та аналізу стійкості розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь із запізненням.

Розглянемо лінійну систему із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t - \tau_i), \tag{1}$$

де $x \in R^n, A_i, i = \overline{1,k}$ – $n \times n$ сталі матриці, $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_i = \tau$, квазіполіном для системи (1) має вигляд:

$$\Phi(\lambda) = det(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i e^{-\lambda \tau_i}), \tag{2}$$

Системі (1) поставимо у відповідність апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь [1-3]

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{k} A_i z_{l_i}(t), l_i = [\frac{\tau_i m}{\tau}],$$

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \mu(z_{i-1}(t) - z_i(t)), i = \overline{1,m}, \mu = \frac{m}{\tau}. \tag{3}$$

Для характеристичного рівняння апроксимуючої системи (3) має місце співвідношення [1-2]

$$\Psi_m(\lambda) = det(\lambda E - \sum_{i=0}^{k} A_i (\frac{\mu}{\mu + \lambda})^{l_i})(\mu + \lambda)^{mn}. \tag{4}$$

і послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^{mn}}, m \in N, \tag{5}$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (2) [2-3].

Безпосереднє обчислення нулів квазіполінома (2) або аналіз їх локалізації є достатньо складною задачею, особливо для систем високого порядку. Для побудови алгоритмів наближення неасимптотичних коренів квазіполінома (2) коренями характеристичного многочлена (4) важливою є така теорема.

Теорема 1. *Якщо нульовий розв'язок рівняння (1) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує $m_0 > 0$, таке, що при $m \geq m_0$ нульовий розв'язок системи відповідної апроксимуючої системи експоненціально стійкий (нестійкий). Якщо для всіх $m \geq m_0$ нульовий розв'язок системи відповідної апроксимуючої системи експоненціально стійкий (нестійкий), то й нульовий розв'язок рівняння (1) експоненціально стійкий (нестійкий).*

Обчислюючи нулі характеристичного рівняння (4) апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь при різних значеннях запізнень за допомогою стандартних процедур у спеціалізованих пакетах Mathematica, Maple, Mathlab, MathCad, для яких зберігається стійкість нульового розв'язку системи (3), знаходимо область значень запізнень, для яких вихідна система із запізненням (1) є експоненціально стійкою.

Використовуючи апроксимуючу систему 3 та наведену теорему 1, в роботі [4] запропоновано алгоритм побудови коефіцієнтних областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь.

[1] Матвій О.В.,Черевко І.М. *Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість* // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, 2. – С. 208-216.

[2] Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко І.М. *Про стійкість лінійних систем із запізненням* // Наук. Вісник Чернівецького ун-ту: Зб. Наук. пр.. Вип. 421. Математика – Чернівці: Рута, 2008. –с. 66-70.

[3] Іліка С.А., Піддубна Л.А., Тузик І.І., Черевко І.М. *Апроксимація лінійних диференціально-різницевих рівнянь та її застосування* // Буковинський математичний журнал. – 2018. – **6**, 3-4. – С. 80-83.

[4] 4. Клевчук І.І., Пернай С.А. , Черевко І.М.*Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь* // Доповіді НАН України. – 2012. – **7**, С. 28-34.

Михайло Матійчук

Спогади про вченого і вчителя

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: perungm@ukr.net

Чим довше ми живемо, то більше повинні відчувати потребу дякувати Богу, небу, землі і людям за все, що маємо, і пам'ятати про тих, хто відійшов у небуття.

У Чернівецькому університеті імені Юрія Федьковича 11-14 жовтня 2006 року відбулася Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", яка була присвячена пам'яті Самуїла Давидовича Ейдельмана. С.Д.Ейдельман – визначний український математик, випускник університету, фундатор кафедри, засновник математичної школи диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Почавши працювати на кафедрі в 1948 році лаборантом, він активно займався науковою роботою, захистив 1953 року в Львові кандидатську дисертацію, а вже в 1959 році – в Московському університеті докторську дисертацію. З 1960 року очолив кафедру, 1964 року в Москві у видавництві "Наука"вийшла його фундаментальна праця "Параболические системы".

Самуїл Давидович читав нові спецкурси, продуктивно займався з аспірантами. У 1963 році першим з його учнів захистив дисертацію С.Д.Івасишен. Він керував також підготовкою дисертацій Б.І.Гольця, Я.Б.Ліпка, опонував дисертацію В.В.Крехівського тощо.

Але період першої половин 60-х років в університеті був нелегкий. Не всім було комфортно, легше було тим, хто славив до небес КПРС. У країні визрівали ідеї дисидентського руху (одні страждали від антисемітизму, інші від шовінізму).

Новий навчальний рік 1963-1964 Самуїл Давидович починав у Воронезькому політехнічному інституті на посаді завідувача кафедри вищої математики, за сумісництвом працював у Воронезькому університеті. У 1968 році переїхав до Києва і працював завідувачем кафедрою у КВІРТі та Соломоновому університеті.

У київський період життя Самуїл Давидович щорічно читав лекції викладачам і студентам нашого факультету, гостював у нас разом з дружиною Тетяною Георгіївною, яка була справжньою професоркою у життєвих питаннях.

Під керівництвом Самуїла Давидовича 17 випускників Чернівецького університету стали кандидатами наук, зокрема, мої студенти Ганна Милицька, Любов Тичинська, Ярослав Дрінь, Олександр Фірдман. Науковий ступінь доктора наук здобули Михайло Матійчук (1980), Степан Івасишен (1981), Микола Житарашу (1987), Валентин Репніков (1989).

Логічним продовженням розділів книги "Параболические системы" є монографії С.Д.Івасишена "Матрица Грина параболических граничных задач" (1990), М.В.Житарашу і С.Д.Ейдельмана "Параболические граничные задачи" (1992), М.І.Матійчука "Сингулярні параболічні крайові задачі"(1999), "Параболічні та еліптичні задачі з особливостями" (2003), "Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні" (2010). Вітчизняними і зарубіжними математиками видано більше сотні праць з посиланнями на монографії і публікації С.Д.Ейдельмана чернівецького періоду життя.

Як справжній учитель Самуїл Давидович залишив слід у житті не тільки випускників Чернівецького університету, але й інших установ і міст Києва, Воронежа, Алма-Ати, часто програмуючи їхні дії на багато років наперед. Він допоміг у науковій роботі також своїм дітям. У творчому доробку С.Д.Ейдельмана більше 300 наукових і науково-методичних праць. Найбільше спільних публікацій – з С.Д.Івасишеним, В.А.Кондратьєвим, А.Н.Кочубеєм, А.О. Чікрієм, Ф.О.Порпером та іншими.

На факультеті є "Аудиторія імені Самуїла Давидовича Ейдельмана". У ній на стендах відображено його життєвий шлях, науково-педагогічні здобутки, військові та інші заслуги. Самуїл Давидович був талановитим ученим, чудовим педагогом, людиною з великим інтелектом і веселою вдачею.

[1] С.Д.Івасишен. *Самуїл Давидович Ейдельман у спогадах.* – Чернівці: Рута, 2008. – 151 с.

Василь Маценко

Моделювання процесів виживання біологічних видів з віковою структурою

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: v.matsenko@chnu.edu.ua

Математичне моделювання застосовується до великої кількості екологічних об'єктів і розв'язує різноманітні екологічні задачі.

Центральне місце в екології займають задачі динаміки чисельності біологічних популяцій. Довгий час такими моделями були моделі з зосередженими параметрами. Нині більш широко вивчаються моделі з розподіленими параметрами, зокрема моделі вікової структури біологічних популяцій.

У даній роботі досліджується вплив вікової структури на умови виживання біологічних видів.

Базова модель динаміки вікової структури ізольованої популяції має вигляд [1]

$$\begin{gathered}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial \tau}=-d(\tau,x)x, \quad \tau,t>0,\\ x(0,t)=\int\limits_0^\infty b(\tau,x)x(\tau,x)d\tau, \quad t>0,\\ x(\tau,0)=\varphi(\tau), \quad \tau\geq 0,\end{gathered} \tag{1}$$

де $x(\tau,t)$ – вікова щільність особин віку τ в момент часу t, $d(\tau,x)$, $b(\tau,x)$ – невід'ємні функції виживання та народжуваності, відповідно, $\varphi(\tau)$ – початковий розподіл.

Але популяції, як правило, не існують ізольовано, тому важливий вплив на динаміку чисельності мають міжвидові взаємодії.

Припустимо, що біологічне угрупування складається з n видів з віковими щільностями $x_i(\tau,t)$, $i=\overline{1,n}$. Задача полягає в тому, щоб визначнити який з видів має більше шансів на виживання. Цю проблему вивчають, як правило, за умови сталості загальної чисельності особин у системі, тобто

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_0^\infty x_i(\tau,t)d\tau = C = \text{const}. \tag{2}$$

Моделі процесів виживання будуються на основі (1) з урахуванням умов (2) шляхом уточнення рівнянь системи (1), а саме вибору виразів для функцій $d(\tau,x)$, $b(\tau,x)$.

Це можна здійснити різними способами, але особливий інтерес викликають два випадки. Це модифікація рівняння виживання та рівняння народжуваності системи (1).

В роботі сконструйовано такі моделі та проведено їх аналіз. Встановлено умови виживання видів, які можуть бути використані в задачах раціональної експлуатації екосистем. Наведено ряд модельних прикладів для гіпотетичних екосистем.

[1] Маценко В.Г. *Математичне моделювання динаміки вікової структури біологічних популяцій* // Чернівці: Чернвецький нац. ун-т імені Ю. Федьковича, 2018. – 191 с.

Ігор Мединський[1], *Віталій Дронь*[2]

Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку

[1]*Національний університет "Львівська Політехніка", Львів, Україна*
E-mail: i.p.medynsky@gmail.com
[2]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Чернівці, Україна*
E-mail: vdron@ukr.net

Клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільного порядку з коефіцієнтами, не залежними від просторових змінних (підклас $\mathbf{E}_{21}^0$ класу $\mathbf{E}_{21}$ за термінологією монографії [1]), означений С. Д. Ейдельманом і Г. П. Малицькою в працях [2, 3]. Дослідженню рівнянь з цього класу присвячені праці С. Д. Ейдельмана, Г. П. Малицької, Л. М. Тичиської, С. Д. Івасишена та Л. М. Андросової. Для таких рівнянь побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), досліджено його властивості і за їх допомогою доведено теореми про існування та єдиність розв'язків задачі Коші та встановлено якісні властивості розв'язків. Якщо ж коефіцієнти рівняння залежать від усіх змінних, тобто рівняння належить до класу $\mathbf{E}_{21}$, то побудова і дослідження ФРЗК істотно ускладнюється. Крім традиційних, виникають серйозні труднощі, які пов'язані з виродженістю рівняння.

Нехай b, n, n_1, n_2 і n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$, $\mathbb{N}_3 := \{1, 2, 3\}$, $m_j = j + 1/(2b) - 1$, $j \in \mathbb{N}_3$. Будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x := (x_1, x_2, x_3)$, де компоненти $x_j := (x_{j1}, ..., x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j := (k_{j1}, ..., k_{jn_j}) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, при цьому $|k| := \sum\limits_{j=1}^{3} |k_j|$, $|k_j| := \sum\limits_{l=1}^{n_j} k_{jl}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Будемо користуватися такими позначеннями: $\Pi_H := \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; $\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot)$, $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot)$, $s \in \mathbb{N}_3$, $z^{(1)} := (z_1, x_2, x_3)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2, x_3)$, $z^{(3)} := (x_1, x_2, z_3)$, $X_1(t) := x_1$, $X_2(t) := (x_{21} + tx_{11}, ..., x_{2n_2} + tx_{1n_2})$, $X_3(t) := (x_{31} + tx_{21} + 2^{-1}t^2 x_{11}, ..., x_{3n_3} + tx_{2n_3} + 2^{-1}t^2 x_{1n_3})$, $t \in \mathbb{R}$.

Розглядається рівняння

$$\big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} - A(t, x, \partial_{x_1})\big) u(t, x) = 0,$$
$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad \text{де} \quad A(t, x, \partial_{x_1}) := \sum_{|k_1| \leq 2b} a_{k_1}(t, x) \partial_{x_1}^{k_1},$$

за таких припущень: 1) вираз $\partial_t - A(t, x, \partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним на $\Pi_{[0,T]}$; 2) коефіцієнти a_{k_1}, $|k_1| \leq 2b$, є комплекснозначними неперервними й обмеженими функціями на $\Pi_{[0,T]}$; 3) існують сталі $H_j > 0$, $j \in \mathbb{N}_3$, числа $\alpha_j \in (0,1)$, $j \in \mathbb{N}_3$, що для всіх $h \in [0,T]$ та $\{(t,x),(t,z^{(1)}),(t,z^{(2)}),(t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]} : |\Delta_{x_1}^{z_1} a_{k_1}(t,x)| \leq H_1|x_1 - z_1|^{\alpha_1}$, $|\Delta_{x_s}^{z_s} a_{k_1}(t,x)| \leq H_s(h^{m_s\alpha_s} + |X_s(h) - z_s|^{\alpha_s})$, $s \in \{2,3\}$, $|k_1| \leq 2b$.

За цих умов побудовано класичний ФРЗК Z, отримано оцінки функції Z та оцінки для тих похідних від Z, що входять у рівняння.

Як і у випадку рівняння другого порядку [4] процедура побудови ФРЗК складається з трьох етапів. На кожному етапі побудови ФРЗК істотну роль відіграють властивості об'ємних потенціалів ядром яких є відповідний параметрикс і які залежать від параметрів. Встановлені оцінки ФРЗК є менш точними, ніж такі ж оцінки ФРЗК для рівнянь другого порядку з праці [4], оскільки оцінювальні функції в них є не експоненти, а ряди експонент, типи спадання яких прямують до нуля. Отримані результати знайдуть застосування до встановлення коректної розв'язності та інтегральних зображень розв'язків задачі Коші для рівнянь з розглядуваних класів.

[1] Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type.* — Basel: Birkhäuser, 2004. — 390 p. — Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. — Vol.152. https://doi.org./10.1007/978-3-0348-7844-9.

[2] Малицкая А. П. *Фундаментальные решения одного класса вырождающихся параболических уравнений* // Приближенные методы интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Киев. пед. ин-т, 1973. — С. 109–130.

[3] Эйдельман С. Д., Малицкая А. П. *О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений* // Дифференц. уравнения. — 1975. — **11**, 7. — С. 1316–1330.

[4] Івасишен С. Д., Growing Мединський І. П. *Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2016. — **59**, 2. — С. 28–42.

Лілія Мельничук

Структура та властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічного рівняння із зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів та з операторами Бесселя різних порядків

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: l.melnuchuk@chnu.edu.ua

Введемо позначення: m, n, k – задані натуральні числа, $m \leq n$; $N := m + n$; $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $y \equiv (y_1, \ldots, y_m) \in R^m$, $z \equiv (z_1, \ldots, z_k) \in R_+^k$, де $R_+^k := \{z = (z_1, \ldots, z_k) \in R^k | z_i > 0,\ i \in \{1, \ldots, k\}\}$; $R_+^{N+k} := R^N \times R_+^k$.

Розглянемо задачу Коші для функції $u = u(t, x, y, z)$

$$\partial_t u = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \partial_{x_j} \partial_{x_l} u + \beta \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u) + \sum_{j=1}^{m} x_j \partial_{y_j} u + \sum_{j=1}^{l} B_{z_j} u,$$

$$t > 0,\ (x, y, z) \in R_+^{N+k}, \tag{1}$$

$$u(t, x, y, z)|_{t=0} = \varphi(x, y, z),\ (x, y, z) \in R_+^{N+k}, \tag{2}$$

$$\partial_{z_j} u(t, x, y, z)|_{z_j=0} = 0,\ t > 0,\ (x, y, z) \in R_+^{N+k}, j \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{3}$$

де всі a_{jl} та β – дійсні сталі, а матриця $(a_{jl})_{j,l=1}^n$ симетрична і додатно визначена; $B_{z_j} \equiv \partial_{z_j}^2 + \frac{2\nu_j + 1}{z_j} \partial_{z_j}$ – оператори Бесселя за змінними z_j порядку $\nu_j \geq 0$.

Рівняння (1) є ультрапараболічним та має виродження, зумовлені, по-перше, необмеженими при $|x| \longrightarrow \infty$ коефіцієнтами при перших похідних по x_j та y_j, а по-друге, необмеженими при $|z| \longrightarrow 0$ коефіцієнтами при перших похідних по z_j.

Методом перетворення Фур'є-Бесселя і методом характеристик знайдено розв'язок задачі (1)–(3) у вигляді інтеграла Пуассона, ядро в якого виписано в явному вигляді

$$G(t, x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = G_1(t, x, y; \xi, \eta) \cdot G_2(t, z; \zeta),$$
$$t > 0,\ \{(x, y, z), (\xi, \eta, \zeta)\} \subset R_+^{N+k}, \tag{4}$$

де G_1 є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (див.[1])

$$\partial_t u(t, x, y) = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \partial_{x_j} \partial_{x_l} u(t, x, y) + \beta \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u(t, x, y)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} x_j \partial_{y_j} u(t, x, y), t > 0,\ (x, y) \in R^N,$$

а функція G_2 є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (див.[2,4])

$$\partial_t u(t,z) = \sum_{j=1}^{k} B_{z_j} u(t,z), t > 0, z \in R_+^k.$$

Використовуючи зображення (4), доведено деякі властивості G. Проведене дослідження узагальнює результати [1]-[4].

[1] Бабич О.О., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. *Фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів* // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. Серія: математика: зб. наук. пр. –**Т.1**, №. –1–2. – Чернівці:Чернівецький нац. ун-т, 2011. – С. 13-24.

[2] Мельничук Л.М. *Структура та властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння з операторами Бесселя* // Буковинський матем. журнал, 2016. – **Т.4**, №. 3–4. – С. 109-112.

[3] Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М. *Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами* // Наук. вісник ЧНУ. Вип. 288. Математика: Зб. наук. праць. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 5-11.

[4] Л. Мельничук Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння із зростаючими коефіцієнтами та з операторами Бесселя різних порядків // *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17-19 вересня 2018 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т.*, 2018 – С. 85.

Володимир Михайлець [1,2], *Ольга Пелехата*[2], *Надія Рева*[2]

Збіжність розв'язків лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь

[1] *Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна*
E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua
[2]*Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна*
E-mail: o.pelehata-2017@kpi.ua, revanadiia@ukr.net

Розглянемо на скінченному інтервалі $(a,b) \subset \mathbf{R}$ для кожного цілого невід'ємного n систему m лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \cdots + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n) \tag{1}$$

із неоднорідними крайовими умовами

$$B_j(n)y(\cdot,n) = c_j(n), \quad j \in \{1,2,\dots,r\} =: [r], \tag{2}$$

де лінійні неперервні оператори

$$B_j(n) : C^{(r-1)}([a,b];\mathbf{C}^m) \to \mathbf{C}^m, \quad j \in [r].$$

Припускається, що матриці-функції $A_{j-1}(\cdot,n)$, вектор-функція $f(\cdot,n)$ сумовні на $[a,b]$, а вектори $c_j(n)$ - задані з простору $\mathbf{C}^m$.

Під розв'язком системи диференціальних рівнянь (1) розуміється вектор-функція $y(\cdot,n) \in W_1^r([a,b];\mathbb{C}^m)$, яка задовольняє векторне рівняння (1) майже скрізь.

Надалі вважатимемо, що *гранична крайова задача* (1) –(2) *для* $n = 0$ *має єдиний розв'язок.* Тоді цікавими є наступні питання:

- За яких умов на ліві частини задач (1) –(2) їх розв'язки $y(\cdot,n)$ існують і єдині при достатньо великих n ($n >> 1$);
- Які додаткові умови на ліві і праві частини задач (1) –(2) гарантують, що

$$\left\| y^{(j-1)}(\cdot,0) - y^{(j-1)}(\cdot,n) \right\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty, \quad j \in [r], \tag{3}$$

  де $\|\cdot\|_\infty$ — sup-норма на відрізку $[a,b]$.

Введемо деякі позначення:

$R_{A_{j-1}}(\cdot,n) := A_{j-1}(\cdot,0) - A_{j-1}(\cdot,n) \in L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$,

$$F(\cdot,n) := \begin{bmatrix} f_1(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}),$$

$R_F(\cdot,n) := F(\cdot,0) - F(\cdot,n)$, $R_F^\vee(t,n) := \int_a^t R_F(s,n)ds$, $R_{A_{j-1}}^\vee(t,n) := \int_a^t R_{A_{j-1}}(s,n)ds$,

$\|\cdot\|_1$ — норма у пр. Лебега вектор(матриць)-функцій на відрізку $[a,b]$.

Теорема 1. *Нехай*

(I) $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_\infty \to 0$;

(II) $\|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot,n)R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1 \to 0$;

(III) $B_j(n)y \to B_j(0)y, \quad y(\cdot) \in C^{(r-1)}([a,b];\mathbb{C}^m)$.

Тоді для достатньо великих n задачі (1)–(2) однозначно скрізь розв'язні. Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задач

(IV) $c_j(n) \to c_j(0)$;

(V) $\|R^{\vee}_F(\cdot,n)\|_\infty \to 0$,

(VI) $\|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot,n)R_F(\cdot,n)\|_1 \to 0$,

то єдині розв'язки задач (1)–(2) при $n = 0$ і $n >> 1$ задовольняють граничну рівність (3).

[1] O. B. Pelekhata, N. V. Reva.*Limit Theorems for the Solutions of Linear Boundary-Value Problems for Systems of Differential Equations.* // Ukrainian Mathematical Journal — 2019. — 71, №7 — С. 1061-1070.

[2] Михайлец В. А., Пелехата О. Б., Рева Н. В. *О теореме Кигурадзе для линейных краевых задач.* //Доповіді НАН України. — 2017. — №12. — С. 8 -13.

[3] V. A. Mikhailets, O. B. Pelekhata, N. V. Reva. *Limit theorems for the solutions of boundary-value problems.* // Ukrainian Mathematical Journal — 2018. — 70, № 2 — С. 216-223.

Ірина Нижник

Біжучі обвальні хвилі в нелінійних дифузійно-кінетичних ланцюгах

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: irene@imath.kiev.ua

Нелінійні дифузійно-кінетичні рівняння є математичними моделями при дослідженні багатьох явищ у фізиці, хімії, біології та техніці. Значна увага приділяється вивченню просторово-дискретних рівнянь, що описують дифузійно пов'язані бістійкі комірки. В роботі [1] описані стійкі стаціонарні розв'язки одновимірних ланцюгів дифузійно пов'язаних комірок з кубічною бістійкою нелінійністю та її кусково-лінійним аналогом. Було показано, що при малих значеннях дифузійної константи кожна комірка може незалежно від інших знаходитись в одному із стійких (або близьких до стійких) станів. Для довільних значень дифузійної константи комірки групуються в кластери, що приводить до існування хаотичних розв'язків. Аналогічно описані стійкі стаціонарні розв'язки у випадку m-стійкої нелінійності [2]. В роботі [3] досліджені біжучі хвилі (traveling waves) в просторово-одновимірних нелінійних дифузійно-кінетичних ланцюгах. Для таких рівнянь існують два стійких сталих розв'язки $u \equiv -1, +1$ та один нестійкий розв'язок $u \equiv 0$. В околі нестійкого стаціонарного розв'язку існують спеціальні просторово-періодичні стійкі відносно малих збурень стаціонарні розв'язки, так звані шаблонні розв'язки (pattern solutions). Якщо в початковий момент в деякій досить великій області Ω розв'язок співпадає з $u \equiv -1$, а зовні цієї області Ω співпадає зі стійким шаблонним, то із збільшенням часу область Ω розширюється, і виникає біжуча хвиля з певним фронтом. Таку хвилю називаємо обвальною, оскільки шаблонний розв'язок поступово переходить в $u \equiv -1$. Доведено існування обвальних хвиль для випадку бістійкої кусочно-лінійної взаємодії. Наводяться аналітичні вирази для швидкості та форми обвальних хвиль [3]. В доповіді будуть наведені нові результати по обвальним хвилям в багатовимірних просторово-дискретних дифузійно-кінетичних рівняннях з бістійкою нелінійністю. Аналітичними та чисельно–аналітичними методами досліджені обвальні хвилі з різними фронтами розповсюдження, знайдено їх швидкості руху.

[1] Nizhnik L., Nizhnik I., Hasler M. *Stable stationary solutions in reaction-diffusion systems consisting of a 1-d array of bistable cells* // Int. J. of Bifurcation and Chaos. – 2002. – 2. – P. 261–279.

[2] Nizhnik I. *Stable stationary solutions for a reaction-diffusion equation with a multi-stable nonlinearity* // Phys. Lett. A. – 2006. – **357**. – C. 319–322.

[3] Нижник І.Л. *Біжучі обвальні хвилі в дифузійно-кінетичних ланцюгах* // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2016. – **11**, 2. – С. 227–241.

Зіновій Нитребич[1], *Оксана Маланчук*[2]

Квазіполіномні розв'язки виродженої двоточкової задачі для рівняння із частинними похідними

[1] *Нац. ун-т „Львівська політехніка", Львів, Україна,*
E-mail: znytrebych@gmail.com
[2] *Нац. медичний ун-т ім. Д. Галицького, Львів, Україна,*
E-mail: Oksana.Malan@gmail.com

За допомогою диференціально-символьного методу [1] досліджено задачу знаходження розв'язків рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченого порядку за просторовими змінними

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+a_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial}{\partial t}+a_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big]U(t,x)=0,\quad t\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

що задовольняють умови у два моменти часу $t=0$ та $t=h$ $(h>0)$

$$\begin{aligned} &b_{11}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x)+b_{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=g_1(x),\\ &b_{21}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x)+b_{22}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x)=g_2(x),\quad x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

У рівнянні (1) $a_i\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$, $i\in\{1,2\}$, – довільні диференціальні вирази вигляду $a_i\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{ik}\frac{\partial^k}{\partial x^k}$, $a_{ik}\in\mathbb{C}$. В умовах (2) $b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $i,j\in\{1,2\}$, – довільні диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, такі, що $|b_{i1}(\nu)|+|b_{i2}(\nu)|>0$ для $i=1$ та $i=2$ відповідно.

Досліджено розв'язність задачі (1), (2) у випадку, якщо функції $g_1(x)$, $g_2(x)$ в умовах (2) є заданими функціями квазіполіномного вигляду, причому характеристичний визначник задачі тотожньо дорівнює нулю.

[1] Каленюк П.І., Нитребич З.М. *Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод.* – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

Андрій Новосядло

Про одну модельну задачу для рівняння теплопровідності з похідними другого порядку за дотичними змінними в умові спряження

ЛНУ ім. І. Франка, Львів, Україна
E-mail: nandrew183@gmail.com

Нехай $\mathcal{D}$ – смуга точок $x = (x', x_d), x' = (x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ у просторі $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, яка обмежена гіперплощинами

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^d | x_d = d_1, d_1 < 0\},\ S_2 = \{x \in \mathbb{R}^d | x_d = d_2, d_2 > 0\}.$$

За таких умов маємо, що область $\mathcal{D}$ розділена гіперплощиною

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^d | x_d = 0\} = \mathbb{R}^{d-1}$$

на дві смуги

$$\mathcal{D}_1 = \{x \in \mathbb{R}^d | d_1 < x_d < 0\} \text{ і } \mathcal{D}_2 = \{x \in \mathbb{R}^d | 0 < x_d < d_2\},$$

так що $\partial\mathcal{D} = S = S_1 \bigcup S_2$, $\partial\mathcal{D}_1 = S^{(1)} = S_1 \bigcup S_0$, $\partial\mathcal{D}_2 = S^{(2)} = S_2 \bigcup S_0$. Покладемо $\Omega = (0, \infty) \times \mathcal{D}$, $\Omega^{(m)} = (0, \infty) \times \mathcal{D}_m,\ m \in \{1, 2\}$; $\Sigma^{(m)} = (0, \infty) \times S_m$, і через $n(x) = (n_i(x))_{i=1}^d = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^d$ позначимо вектор нормалі до S_m в точці $x \in S_m,\ m \in \{0, 1, 2\}$. Точки в $\mathbb{R}^{d+1}$ позначаються (t, x), при цьому t інтерпретується як часова змінна.

Розглянемо початково-крайову задачу Вентцеля: знайти функцію

$$u(t,x) = \begin{cases} u_1(t,x), & (t,x) \in \overline{\Omega}^{(1)}, \\ u_2(t,x), & (t,x) \in \overline{\Omega}^{(2)}, \end{cases} \tag{1}$$

таку, що в області $\Omega^{(m)}$ функція u_m є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial u_m(t,x)}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta u_m(t,x) = 0, \qquad m \in \{1, 2\}, \tag{2}$$

на межі $\Sigma^{(m)}$, $m \in \{1, 2\}$, функція u_m задовольняє крайову умову

$$L_m u_m\big|_{\Sigma^{(m)}} \equiv \left.\frac{\partial u_m(t,x)}{\partial x_d}\right|_{x_d = d_m} = 0, \qquad m \in \{1, 2\}, \tag{3}$$

на межі $\Sigma^{(0)}$ функції u_1 і u_2 задовольняють умови спряження

$$L_{01}(u)\big|_{\overline{\Sigma}^{(0)}} \equiv (u_1(t,x) - u_2(t,x))\big|_{x_d=0} = 0, \tag{4}$$

$$L_{02}(u)\big|_{\overline{\Sigma}^{(0)}} \equiv \Bigg(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d-1} \beta_{ij}(x') D_i D_j u(t,x) + \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i(x') D_i u(t,x) - $$

$$\left. - q_1(x') D_d u_1(t,x) + q_2(x') D_d u_2(t,x), \Bigg)\right|_{x_d=0} = 0, \tag{5}$$

а при $t = 0$ виконується початкова умова

$$u_m(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{\mathcal{D}}_m,\ m \in \{1,2\}. \tag{6}$$

Тут $\Delta = \sum\limits_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, D_i – символ частинної похідної за змінною x_i, $i \in \{1,\dots,d\}$, $\varphi(x)$ – задана обмежена неперервна функція на $\mathbb{R}^d$, $\beta_{ij}(x')$, $\alpha_i(x')$, $\{i,j\} \subset \{1,\dots,d-1\}$, $q_m(x')$, $m \in \{1,2\}$ – задані обмежені неперервні функції на $\mathbb{R}^{d-1}$ такі, що матриця $\beta(x') = \big(\beta_{ij}(x')\big)_{i,j=1}^{d-1}$ – симетрична і невід'ємно вичначена, і для них виконуються умови:

a) $\beta_1|\Theta'|^2 \le (\beta(x')\Theta',\Theta') \le \beta_2|\Theta'|^2,\ \beta_1,\beta_2 > 0,$

b) $q_m(x') \ge 0,\ x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $m \in \{1,2\}$ і $\inf\limits_{x'\in\mathbb{R}^{d-1}}(q_1(x') + q_2(x')) > 0;$

c) $\beta_{ij},\ \alpha_i,\ q_m \in H^{\lambda}(\mathbb{R}^{d-1})$, $\lambda \in (0,1)$, $\{i,j\} \subset \{1,\dots,d-1\}$, $m \in \{1,2\}$,

де $H^{\lambda}(\mathbb{R}^{d-1}) -$ простір Гельдера.

Задача (1)-(6) з похідними другого порядку за дотичними просторовими змінними в умові спряження виникає в теорії випадкових процесів при вивченні аналітичними методами так званої задачі про склеювання двох процесів дифузії у скінченновимірному евклідовому просторі або, що те ж саме, при побудові математичних моделей фізичного явища дифузії в середовищах, де на фіксованих поверхнях розташовані мембрани [1].

Звернемо увагу на той факт, що за наявності в умові спряження (5) похідних другого порядку за дотичними змінними ця задача не є параболічною в тому сенсі, що для неї не виконується так звана умова доповняльності, яку у випадку задач спряження ще називають умовою сумісного накривання [3]. А це означає, що ця задача не вкладається в клас початково-крайових задач для параболічних рівнянь і систем, для яких побудована загальна теорія.

Класичну розв'язання задачі (1)-(6) у просторі обмежених неперервних функцій отримано в роботі методом граничних інтегральних рівнянь з використанням потенціалів, побудованих за допомогою звичайних фундаментальних розв'язків рівномірно параболічних операторів. Доводиться також, що за допомогою розв'язку цієї задачі можна побудувати однопараметричну напівгрупу Феллера, якій відповідає на $\overline{\mathcal{D}}$ деякий однорідний марковський процес. Крім того показано, що цей процес можна трактувати як узагальнену дифузію в розумінні М.І. Портенка [1].

[1] Портенко М.І. *Процеси дифузії в середовищах з мембранами.* – Київ: Інститут математики НАН України, 1995. – 199 с.

[2] Вентцель А.Д. *О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов* // Теория вероятн. и ее примен. – 1959. – **4**, №2. – С. 172-185.

[3] Эйдельман С.Д. *Параболические системы.* – Москва: Наука, 1964. – 443 с.

Б. О. Нуржанов[1,2], *П. Р. Оринбаєв*[1], *Т. Омаров*[2]

Про застосування методу А. М. Самойленка до розв'язування багатоточкових крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма

[1] *Каракалпацький відділ Інститутн математики імені В.І. Романовського АН Республіки Узбекистан, Нукус, Узбекистан*
[2] *Каракалпацький державний університет, Нукус, Узбекистан*
E-mail: nurjanov@list.ru

У даній роботі розглядається питання наближенної побудови роз-в'язків багатоточкових крайових задач для системи інтегро-диферен-ціальних рівнянь Фредгольма з функціональними крайовими умо-вами

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \int\limits_0^T \mathbf{g}(t, s, \mathbf{x}(s))\, ds\right), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{p} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t_i) + \int\limits_0^{T_1} \mathbf{B}(t)\, \mathbf{x}(t)\, dt = \mathbf{d}, \tag{2}$$

де $t \in [0, T]$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{d}$ - точки евклідового простору E_n, $\mathbf{A}_i$, $i = \overline{0, p}$ - стали $(n \times n)$-матриці, $p \geq 1$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{p-1} < t_p = T$, $\mathbf{B}(t) \in C[0, T]$, причому матриці $\mathbf{A}_i$ і $\mathbf{B}(t)$ такі, що

$$\det\left[\sum_{i=0}^{p} \mathbf{A}_i \frac{t_i}{T} + \frac{1}{T} \int\limits_0^{T_1} t\mathbf{B}(t)\, dt\right] \neq 0, \quad T_1 \leq T.$$

Для розв'язування цього питання можна застосувати чисельно-аналітичний метод послідовних наближень А. М. Самойленко [1].

Згідно чисельно-аналітичного методу, для знаходження розв'язку крайової задачі (1), (2) побудуємо рекурентную послідовність функ-цій

$$
\begin{gathered}
\mathbf{x}_m(t,\mathbf{x}_0)=\mathbf{x}_0+\int\limits_0^t\left[\mathbf{f}_{m-1}(\tau)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T\mathbf{f}_{m-1}(\tau)\,d\tau\right]d\tau+\\
+\frac{t}{T}\mathbf{H}\left\{\mathbf{d}-\left[\sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_i+\int\limits_0^{T_1}\mathbf{B}(\tau)\,d\tau\right]\mathbf{x}_0-\right.\\
-\sum_{i=1}^{p-1}\mathbf{A}_i\int\limits_0^{t_i}\left[\mathbf{f}_{m-1}(\tau)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T\mathbf{f}_{m-1}(\tau)\,d\tau\right]d\tau-\\
\left.-\int\limits_0^T\mathbf{B}(\tau)\left[\int\limits_0^\tau\left(\mathbf{f}_{m-1}(\tau)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T\mathbf{f}_{m-1}(\tau)\,d\tau\right)d\tau\right]d\tau\right\},\\
\mathbf{x}_0(t,\mathbf{x}_0)=\mathbf{x}_0,\ m=1,2,\ldots,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

де

$$
\mathbf{f}_{m-1}(t)=\mathbf{f}\left(t,\mathbf{x}_{m-1}(t,\mathbf{x}_0),\int\limits_0^T\mathbf{g}(t,s,\mathbf{x}_{m-1}(s,\mathbf{x}_0))\,ds\right),
$$

$$
\mathbf{H}=\left(\sum_{i=0}^{p}\mathbf{A}_i\frac{t_i}{T}+\frac{1}{T}\int\limits_0^{T_1}t\mathbf{B}(t)\,dt\right)^{-1}.
$$

Все функції цієї послідовності задовольняють крайові умови (2).

В работі одержано умови збіжності послідовних наближень виду (3) до граничної функції і досліджується зв'язок граничної функції з розв'язком крайової задачі (1), (2).

[1] Самойленко А. М., Ронто Н. И. *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.

Олександра Осипова, Ігор Черевко

Декомпозиція та стійкість сингулярно збурених лінійних багато темпових систем

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: shurenkacv@gmail.com, i.cherevko@chnu.edu.ua

Робота присвячена дослідженню методики застосування методу інтегральних многовидів [1-2] для декомпозиції та розщеплення лінійних сингулярно збурених багатотемпових систем

$$\prod_{j=0}^{i}\varepsilon_j\dot{x}_i=\sum_{j=0}^{k}A_{ij}x_j,\ i=\overline{0,k}, \tag{1}$$

в області $\Omega=\{(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k):t\in\mathbb{R},\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k>0\}$, де $x_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $i=\overline{0,k}$, $A_{ij}=A_{ij}(t),\ i,j=\overline{0,k}$, – матриці розмірностей $n_i\times n_j$, $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k$ – малі додатні параметри.

Основна ідея схеми розщеплення полягає у виділенні групи повільних змінних досліджуваної системи з подальшим її приведенням до спеціального вигляду в якому підсистема повільних змінних не містить швидких змінних.

Припустимо, що для системи (1) справджуються умови:

1) матриці $A_{ij}=A_{ij}(t),\ i,j=\overline{0,k}$, рівномірно обмежені за нормою для $t\in\mathbb{R}$ додатною сталою M.

2) власні значення $\lambda_i=\lambda_i(t),\ i=\overline{1,n_k}$, матриці $A_{kk}(t)$ задовольняють нерівність $\mathrm{Re}\lambda_i\le-2\beta<0,\quad t\in\mathbb{R}$.

Теорема 1 ([3]). *Нехай виконуються умови 1)-2). Тоді для достатньо малих $\varepsilon_i,\ i=\overline{1,k}$, існує невироджена заміна змінних, за допомогою якої система* (1) *зводиться до* $(k+1)$ *незалежних підсистем*

$$\begin{cases}\dot{y}_0^k=B_{00}^k y_0^k,\\ \prod\limits_{j=0}^{i}\varepsilon_j\dot{y}_i^{k+1-i}=B_{ii}^{k+1-i}y_i^{k+1-i}, i=\overline{1,k}.\end{cases} \tag{2}$$

У роботі знайдено явний вигляд розщеплюючого перетворення для систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь із двома та багатьма малими параметрами.

Оскільки точне знаходження розщеплюючого перетворення можливе тільки у найпростіших випадках, у роботі запропоновано і обґрунтовано можливість ефективної побудови асимптотичних розкладів коефіцієнтів перетворення за степенями малих параметрів [4-5]. Одержано загальний вигляд розщеплених систем нульового та першого наближення.

Досліджено властивості стійкості інтегрального многовиду повільних змінних та встановлено принцип зведення, який полягає в тому, що розв'язок вихідної сингулярно збуреної системи буде стійким (асимптотично стійким, нестійким) тоді і тільки тоді, коли стійким (асимптотично стійким, нестійким) буде розв'язок підсистеми повільних змінних [6].

У роботі здійснено числове моделювання для тестової модельної задачі з двома малими параметрами та встановлено точність наближення її розв'язку розв'язками розщеплених систем нульового та першого наближення.

[1] Стрыгин В.В., Соболев В.А. *Разделение движения методом интегральных многообразий.* – М.: Наука, 1988. – 256 с.

[2] Воропаева Н.В., Соболев В.А. *Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем.* – М.: Физматлит, 2009. – 256 с.

[3] Осипова О.В., Черевко І.М. *Розщеплення різнотемпових сингулярно збурених лінійних систем* // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту, серія «Математика». – 2012. – **2**, 1. – С. 78-83.

[4] Осипова О.В., Черевко І.М. *Асимптотична декомпозиція лінійних сингулярно збурених систем* // Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, 3-4. – С. 114-118.

[5] Ihor Cherevko, Oleksandra Osypova. *Asymptotic decomposition of linear singularly perturbed multiscale systems* // Miskolc Mathematical Notes. – 2015. – **16**, 2. – С. 729-745.

[6] Осипова О.В., Черевко І.М. *Про розщеплення та декомпозицію лінійних стаціонарних сингулярно збурених диференціальних рівнянь* // Буковинський математичний журнал. – 2019. – **7**, 2. – С. 76-85.

Галина Пасічник

Про задачу Коші для ультрапараболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів та слабким виродженням на початковій гіперплощині

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: pasichnyk.gs@gmail.com

Нехай $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ – задані натуральні числа, $n := n_1 + n_2 + n_3$ – їх сума; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$. Розглядається рівняння

$$\alpha(t)\partial_t u - \beta(t)\Big(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} u + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} u + \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} u +$$

$$+ b\sum_{j=1}^{n_1} \partial_{x_{1j}}\Big(x_{1j}u\Big)\Big) - au = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де α і β – неперервні на відрізку $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0,T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і β монотонно неспадна; a_{js}, b і a – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j,s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, та виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_1 := (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \quad \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \geq \delta|\sigma_1|^2.$$

В [1] отримано оцінку фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (1) та доведено теореми про інтегральне зображення розв'язків неоднорідного рівняння, які є обмеженими, як функції x, а при $t \to 0$ поводяться відповідним способом залежно від типу виродження рівняння при $t = 0$.

Тут наводяться результати дослідження розв'язності задачі Коші у спеціальних вагових L_p-просторах для рівняння у випадку слабкого виродження, тобто коли

$$\int_0^T \frac{dt}{\alpha(t)} < \infty.$$

Аналогічні результати для рівняння без виродження на початковій гіперплощині опубліковані в [2] та [3].

[1] Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. *Ультрапараболічні рівняння з необмежено зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів і виродженнями на початковій гіперплощині* // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2018. – **61**, № 1. – С.31–46.

[2] Івасишен С., Пасічник Г. *Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. – 2014. – 11. – С. 73–87.

[3] Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. *Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рів-няння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів* // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 205–229.

Галина Перун, Володимир Ясинський

Неперервно збурена задача Коші для параболічного рівняння з запізненням

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: perungm@ukr.net

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, P)$ з неспадним потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ для $t_1 \leq t_2$ випадкова функкія $U(t,x,\omega), (t,x) \in \Pi, \Pi = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \omega \in \Omega$ вимірна відносно σ-алгебри F_t і з імовірністю 1 є розв'язком рівняння з відхиленням аргумента

$$d_t U(t,x,\omega) = \left[\sum_{|k| \leq 2b} A_k(t) D_x^k U(t,x,\omega) + f_1(x, U(t-h,x)) \right] dt +$$

$$+ \left[\sum_{|k| \leq b} B_k(t) D_x^k U(t,x,\omega) + f_2(x, U(t-h,x)) \right] dw(t,\omega), \tag{1}$$

де h – запізнення, $h > 0$, $w(t,\omega)$ – стандартний скалярний вінерівський процес.

Задача Коші полягає у знаходженні з імовірністю 1 неперервного розв'язку рівняння (1) з детермінованою початковою умовою

$$U(t,x,\omega) = \varphi(t,x),\ 0 \leq t \leq h,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Тут f_1, f_2, φ – відомі функції своїх аргументів. Задачу розв'язуватимемо методом кроків [1 с.17].

Коректність задачі встановлює така теорема.

Теорема. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *визначені та неперервні на* $[0,T]$, *для яких виконується посилена умова параболічності*

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=2b} A_k(t)(i\sigma)^k + \mathrm{Im} \left(\sum_{|k|=b} B_k(t)(i\sigma)^k \right)^2 \leq -\delta_0 |\sigma|^{2b}, \tag{3}$$

$$\delta_0 > 0,\ \sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n),\ \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

Функції $\varphi(t,x)$, $f_1(x,\varphi(t,x))$, $\sum\limits_{|k|=b} B_k(t) D_x^k f_2(x,\varphi(t,x))$ неперервні за аргументом t, диференційовні за просторовими аргументами і мають перетворення Фур'є $\tilde{f}_1$ та $\tilde{f}_2$. Тоді існує функція Гріна $G(t,\tau,x,\omega)$ задачі (1), (2), з допомогою якої розв'язок на інтервалі $t \in (lh, (l+1)h)$, $l \in N$ визначається формулою

$$U(t,x,\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, lh, x-\xi, \omega) \varphi(lh, \xi) d\xi +$$

$$+\int\limits_{lh}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,s,x-\xi,\omega)\Big[f_1(\xi,\varphi(s-h,\xi))- \qquad (4)$$

$$-\sum_{|k|\le b} B_k(s)D_\xi^k f_2(\xi,\varphi(s-h,\xi))\Big]d\xi ds+$$

$$+\int\limits_{lh}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,s,x-\xi,\omega)f_2(\xi,\varphi(s-h,\xi))d\xi dw(s,\omega),$$

$$\varphi(lh,x)=\int\limits_{t\to lh\neq 0} U(t,x).$$

Для нього справджується нерівність

$$|M\{D_x^k U(t,x,\omega)\}|\le C\left(t^{-\frac{|k|}{2b}}|\varphi|_{C(\Pi)}+|f_1|_{C^1(\Pi)}+\sum_{|k|\le b}|b_k D_{f_2}^k|_{C^{(1)}(\Pi)}\right), \qquad (5)$$

де $|k|\le 2b$, $|f|_{C^m}=\sup\limits_{\Pi}|D_x^m f(t,x)|$, E – операція математичного сподівання.

Шукатимемо розв'язок задачі (1) – (2) методом інтегрального перетворення Фур'є.

[1] Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* – М.: Наука, 1971. – 297 с.

Іван Пукальський, Богдан Яшан

Оптимальне керування в нелокальній крайовій задачі з інтегральною умовою для параболічних рівнянь з виродженням

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: i.pukalsky@chnu.edu.ua, bohdanjaschan94@gmail.com

Нехай D обмежена область в R^n з межею ∂D, $dimD = n$, Ω - деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset D$, $dim\Omega \leq n-1$. Позначимо через $Q_{(0)} = \{(t,x)|t \in [0,T), x \in \Omega\} \cup \{(t,x), t = \eta, x \in D\}$, η - фіксоване додатне число, $\eta \in (0,T)$, $\Gamma = [0,T) \times \partial D$, $\rho(x) = \min\limits_{x \in D \setminus \overline{\Omega}, z \in \overline{\Omega}} |x - z|$.

В області $Q = [0,T) \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій (u, q_1, q_2), на яких функціонал

$$I(q_1,q_2) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D F_1(t,x;u(t,x;q_1,q_2),q_1(t,x))dx+$$

$$+\int\limits_D F_2(x;u(T,x;q_1(T,x),q_2(x)),q_2(x))dx \qquad (1)$$

досягає мінімуму в класі функцій $(q_1,q_2) \in V = \{(q_1,q_2)|q_1 \in C^{\alpha}(Q),$ $q_2 \in C^{2+\alpha}(D),\ \nu_{11}(t,x) \leq q_1 \leq \nu_{12}(t,x),\ \nu_{21}(x) \leq q_2 \leq \nu_{22}(x)\}$, із яких $u(t,x;q_1(t,x),q_2(x))$ задовольняє при $(t,x) \in Q \setminus Q_{(0)}$ рівняння

$$\Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\Big]u =$$

$$= f(t,x;q_1(t,x)), \qquad (2)$$

інтегральну умову за часовою змінною

$$u(0,x;q_1(0,x),q_2(x))+$$

$$+\int\limits_0^T R(\tau,x)u(\tau,x;q_1(\tau,x),q_2(x))d\tau = \varphi(x;q_2(x)), \qquad (3)$$

і на бічній поверхні Γ крайову умову

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D}(u(t,x;q_1(t,x),q_2(x)) - \psi(t,x)) = 0. \qquad (4)$$

Задачу (1) – (4) досліджено за таких обмежень на ріст коефіцієнтів при $x \longrightarrow \partial D$, $t \longrightarrow \eta$: $A_{ij} = O(\rho(x)^{\beta_i^{(1)}+\beta_j^{(1)}}|t-\eta|^{\beta_i^{(2)}+\beta_j^{(2)}})$, $A_r = O(\rho(x)^{-\mu_r^{(1)}}|t-\eta|^{-\mu_r^{(2)}})$, $r \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\beta_j^{(\nu)} \in (-\infty,\infty)$, $\mu_r^{(\nu)} \in [0,\infty)$, $\nu \in \{1,2\}$, $A_0 > 0$.

При визначених умовах гладкості на коефіцієнти рівняння (1), функції F_1, F_2, f, φ, R, ψ в гельдерових просторах зі степеневою вагою одержано умови існування, єдиності та встановлено оцінки похідних розв'язку задачі (2) – (4) у гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги в гельдерових просторах залежить від чисел $\beta_i^{(\nu)}$, $\mu_r^{(\nu)}$.

Одержані результати використовуються для встановлення необхідних та достатніх умов існування оптимального розв'язку системи, що описується задачею (1) – (4).

Ольга Ровенська

Екстремальна задача для подвійних операторів Валле Пуссена

Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ, Україна
E-mail: rovenskaya.olga.math@gmail.com

Позначимо через $C^q_{\beta,\infty}$ клас неперервних 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати в вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\,dt,$$

де

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

— ядро Пуассона, а функція $\varphi(x)$ задовольняє умову $\operatorname{esssup}|\varphi(x)| \le 1$. Клас $C^q_{\beta,\infty}$ складається з 2π-періодичних функцій, які дозволяють аналітичне продовження до функцій $f(z) = f(x+iy)$ у відповідну смугу комплексної площини $|y| < \ln\frac{1}{q}$.

Нехай L — множина сумовних 2π–періодичних функцій, $f \in L$,

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f, $S_n(f;x)$ — часткові суми ряду Фур'є.

Нехай p_1, p_2 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 < n + 2$. Функції $f \in L$ поставимо у відповідність послідовність подвійних середніх Валле Пуссена [1, 2, 3]

$$V_{n,p_1,p_2}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1} V_{k+1,p_2}(f;x) =$$

$$= \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f;x).$$

За умови $p_1 + p_2 - 1 = n$ маємо [4]

$$\sigma_n^{2,-1}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{n-p_1+1}\sum_{m=k-n+p_1}^{k} S_m(f;x).$$

Отримано асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів $\sigma_n^{2,-1}(f;x)$ від функцій з класів інтегралів Пуассона $C^q_{\beta,\infty}$.

Теорема 1. *Нехай $\beta = 0$, $p_1 + p_2 = n + 1$. Тоді для $q \in (0; q_0)$, $q_0 = 0,2159$ при $n \to \infty$ має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,\infty}, \sigma_n^{2,-1}) = \frac{4q}{(1+q^2)^2\pi p_1 p_2} + O(1)\frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5},$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, q, p_1, p_2.

[1] Rovenska O.O., Novikov O.O., *Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums*// Nonlinear Oscillations. — 2010. — **13**, (1). — P. 108–111.

[2] Ровенская О.Г., Новиков О.А. *Приближение аналитических периодических функций линейными средними рядов Фурье* // Чебышевский сб. — 2016. — **17**, (2). — С. 170–183.

[3] Новиков О.А., Ровенская О.Г. *Приближение классов интегралов Пуассона* r*-повторными суммами Валле Пуссена* // Вестн. Одесского нац. ун-та. Матем. Мех. — 2014. — **19**, (23). — С. 14–26.

[4] Novikov O., Rovenska O. *Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums* // Lobachevskii J. of Math. — 2017. **38**, (3). — P. 502–509.

Галина Семчишин

Дослідження розв'язності триточкових крайових задач для алгебро-диференціальних систем рівнянь у критичному випадку

Ужгородсьий національний університет, Ужгород, Україна
E-mail: halyna_semchyshyn@ukr.net

Досліджується алгебро-диференціальна система рівнянь

$$J\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t,y), \quad t \in [a,b] \tag{1}$$

підпорядкована лінійним триточковим крайовим умовам

$$A_1 y(a) + A_2 y(t_2) + A_3 y(b) = d, \tag{2}$$

де J – n-вимірна клітка Жордана, яка відповідає нульовому власному значенню, $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j=1}^n$ – $(n \times n)$-вимірна матриця, $a_{i,j}(t) \in C[a,b]$, $f(t,y)$ – n-вимірна вектор-функція, $f(t,y) \in C[a,b]$; A_1, A_2, A_3 – $((n-1) \times n)$-вимірні матриці, $a = t_1 < t_2 < t_3 = b$, d – $(n-1)$-вимірний сталий вектор.

У припущенні, що $f_n(t,y) = f_n(t, y_2, \ldots, y_n)$ і $a_{n,1}(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$, досліджується питання існування та наближеної побудови розв'язків триточкових крайових задач для алгебро-диференціальних систем рівнянь вигляду (1), (2) у критичному випадку, тобто коли відповідна лінійна однорідна крайова задача має k лінійно незалежних розв'язків.

[1] Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи.* – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 320 с.

[2] Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями.* – Київ: Вища школа, 2000. – 294 с.

Михайло Симотюк

Діофантові властивості поліноміальної в'язки матриць із цілочисловими параметрами

ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail: mykhaylo.m.symotiuk@gmail.com

Нехай $L(\lambda, k)$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, – поліноміальна матрична в'язка

$$L(\lambda, k) = \lambda^n + A_{n-1}(k)\lambda^{n-1} + \ldots + A_0(k), \tag{1}$$

де $A_j(\xi) = \|a^j_{q,r}(\xi)\|^m_{q,r=1}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, – квадратні матриці порядку m. Елементи $a^j_{q,r}(\xi)$ цих матриць є поліномами від $\xi_1, \ldots, \xi_p$ степеня N з комплексними коефіцієнтами вигляду

$$\begin{gathered} a^j_{q,r}(\xi) = \sum_{|s| \leq N} a^{j,s}_{q,r} \xi_1^{s_1} \ldots \xi_p^{s_p}, \\ a^{j,s}_{q,r} \in \mathbb{C}, \; s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}^p_+, \; |s| \leq N. \end{gathered} \tag{2}$$

Нехай $l(\lambda, k)$ — визначник матриці $L(\lambda, k)$; $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{mn}(k)$ — λ-корені многочлена $l(\lambda, k)$; $\vec{h}_q(k) \equiv \mathrm{col}(h^1_q(k), \ldots, h^m_q(k)) \in \mathbb{C}^m$ – перший стовпець матриці $L^*(\lambda_q(k), k)$, яка є приєднаною до матриці $L(\lambda_q(k), k)$, $\vec{H}_q(k) \equiv \mathrm{col}\left(\vec{h}_q(k), \lambda_q(k)\vec{h}_q(k), \ldots, \lambda_q^{n-1}(k)\vec{h}_q(k)\right) \in \mathbb{C}^{mn}$, $q = 1, \ldots, mn$, $H(k) \equiv \det(\vec{H}_1(k), \ldots, \vec{H}_{mn}(k))$, $k \in \mathbb{Z}^p$.

Кажемо, що для в'язки (1) справджується властивість H_δ, $\delta \in \mathbb{R}$, якщо для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність $|H(k)| > (1 + |k|)^{-\delta}$. Властивість H_δ використовується для встановлення розв'язності задач з багатоточковими умовами для систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами [1]. На основі результатів метричної теорії чисел та теорії симетричних многочленів доведено існування такого числа δ_0, яке залежить від m, n, p, N, що для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів $a^{j,s}_{q,r}$ у формулі (2), умова H_δ виконується при $\delta > \delta_0$.

[1] Пташник Б.И. *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

Василь Слюсарчук

Про щільність множин задач Коші без розв'язків і задач із неєдиними розв'язками у множині всіх задач Коші

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна
E-mail: v.e.slyusarchuk@gmail.com

Нехай E – довільний банаховий простір. У випадку $\dim E = \infty$ Годунов А.Н. [1] побудував приклад неперервного відображення $F : \mathbb{R} \times E \to E$, для якого задача Коші

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = 0, \quad t \in (-\delta, \delta),$$

не має розв'язку для кожного $\delta > 0$.

У [2] показано, що множина всіх задач Коші з такою властивістю є щільною у множині всіх задач Коші.

Правильним є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай E і $f : \mathbb{R} \times E \to E$ – довільний нескінченновимірний банаховий простір і неперервне відображення відповідно.*

Тоді для довільних точки $(t_0, z_0) \in \mathbb{R} \times E$ і числа $\varepsilon > 0$ існує таке неперервне відображення $g : \mathbb{R} \times E \to E$, що

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times E} \|f(t, x) - g(t, x)\| \leq \varepsilon$$

і задача Коші

$$z'(t) = g(t, z(t)), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta),$$

не має розв'язку для кожного $\delta > 0$.

У [3, 4] показано, що множина всіх задач Коші з неєдиними розв'язками також є щільною у множині всіх задач Коші.

Правильною є така теорема.

Теорема 2. *Нехай G – область у просторі $\mathbb{R} \times E$ і $f : G \to E$ – довільне неперервне відображення (банаховий простір E може мати довільну розмірність).*

Тоді для довільних точки $(t_0, x_0) \in G$ і числа $\varepsilon > 0$ існує таке неперервне відображення $g : G \to E$, що

$$\sup_{(t,x)\in G} \|g(t, x) - f(t, x)\| \leqslant \varepsilon$$

і задача Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t)), \; x(t_0) = x_0$$

має більше одного розв'язку.

Аналогічні твердження справджуються і для диференціально-функціональних рівнянь.

[1] Годунов А. Н. О теореме Пеано в банаховых пространствах // Функцион. анализ и его прил. – 1975. – **9**, вып. 1. – С. 59–60.

[2] Слюсарчук В. Е. Плотность множества неразрешимых задач Коши во множестве всех задач Коши в случае бесконечномерного банахова пространства // Нелінійні коливання. – 2002.– **5**, № 1. – С. 86–89.

[3] Слюсарчук В. Ю. Задача Коші з неєдиними розв'язками // Наук. вісник Чернівецького ун-ту, серія: Математика. – 2011. – **1**, № 4. – С. 117–118.

[4] Слюсарчук В. Ю. Щільність множини всіх задач Коші з неєдиними розв'язками у множині всіх задач Коші // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 7. – С. 1000–1006.

Тетяна Сопронюк, Тетяна Ільчук

Створення нейронної мережі для аналізу електрокардіограми

[1] *Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: t.sopronyuk@chnu.edu.ua, ilchuk.tetiana@chnu.edu.ua

Метою роботи було створити нейронну мережу, яка аналізуватиме дані електрокардіограми і класифікуватиме серцебиття поміж 5 класів: нормальний ритм, надшлуночковий передчасний ритм, передчасне скорочення шлуночків, злиття шлуночкового і нормального ритму, некласифікований ритм. Нейронна мережа – це математична модель, побудована по принципу функціонування біологічних мереж нервових клітин. Вона являє собою мережу з'єднаних і взаємодіючих між собою штучних нейронів. Штучний нейрон, з математичної точки зору, являє собою функцію активації від єдиного аргументу – лінійної комбінації вхідних сигналів.

Штучні нейрони організовано в шари. Нейронна мережа містить вхідний шар, вихідний шар та один або більше прихованих шарів. Для навчання мережі був використаний набір даних ECG Heartbeat Categorization Dataset з сайту Kaggle [4]. Цей набір скомпонований з двох відомих наборів сигналів серцебиття: the MIT-BIH Arrhythmia Dataset та The PTB Diagnostic ECG Database. Набір складається з CSV файлів. Кожен файл містить матрицю, рядок якої являє собою один приклад певного серцебиття. Матриця має 188 стовпців. Перші 187 стовпців – це дані електрокардіограми, 188 стовпець – це клас, до якого належить приклад.

Функція втрат відображає різницю між отриманим результатом та очікуваним. В роботі було використано такі функції втрат: середньоквадратична похибка, перехресна ентропія. Функція втрат повинна бути неперервною та диференційовною.

Навчання мережі полягає в мінімізації помилок, тобто в мінімізації функції втрат. Для цього було використано метод зворотнього поширення помилки [1]. Ідея алгоритму полягає в поширенні помилки від виходів до входів мережі. Для мінімізації помилки використовується метод градієнтного спуску [1]. Його ідея полягає в тому, що для пошуку мінімуму функції потрібно рухатися в сторону, протилежну градієнту, оскільки градієнт визначає напрямок, в якому функція зростає найшвидше. Для обчислення градієнту потрібно знайти всі частинні похідні функції втрат за допомогою ланцюгового правила (правила диференціювання складної функції).

Величина кроку в потрібному напрямку залежить від темпу навчання. В роботі було використано два підходи градієнтного спуску: стохастичний (на кожній ітерації з навчального набору випадковим чином обирається один приклад, відповідно ваги зв'язків коректуються для кожного прикладу) та пакетний (на кожній ітерації випадковим чином обирається вибірка з навчального набору, відповідно ваги коректуються для всієї вибірки).

Кількість прихованих шарів, кількість нейронів в шарах, темп навчання, кількість прикладів в пакеті, кількість епох – це гіперпараметри нейронної мережі. В роботі було створено моделі з різними значеннями гіперпараметрів і протестовано їх для вибору найбільш оптимальної моделі.

Нейронна мережа була створена засобами мови Python. Структура програми містить 3 класи:
1) NeuralNetwork – основний клас, що містить реалізацію зворотнього поширення помилок та градієнтного спуску.
2) Layer – клас, що зберігає інформацію про шар нейронної мережі.
3) DataLoader – клас для завантаження даних для навчання та тестування мережі.

Також в роботі було створено моделі за допомогою відкритої бібліотеки Keras, написаної на Python. Keras було створено для швидких експериментів з мережами глибинного навчання [3].

[1] Рашид, Тарик. *Создаем нейронную сеть.* – СПб.: ООО «Альфа-книга», 2017. – 272 с.

[2] Аггарвал, Чару. *Нейронные сети и глубокое обучение: учебный курс.* – СПб.: ООО «Диалектика», 2020. – 752 с.

[3] Шолле, Франсуа. *Глубокое обучение на Python.* – СПб.: Питер, 2018. – 400 с.

[4] ECG Heartbeat Categorization Dataset [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://www.kaggle.com/shayanfazeli/heartbeat.

Юрій Теплінський

Метод укорочення у відшуканні майже-періодичних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: triton1950@ukr.net

Відомо, що велика кількість прикладних задач з різних розділів математики, фізики, техніки потребує досліджень проблем існування коливних розв'язків диференціальних систем, що є їх математичними моделями. Коливними рухами динамічних систем за В. В. Немицьким [1] називають їх рекурентні рухи, до класу яких належать зокрема квазіперіодичні та майже-иеріодичні рухи. Широко відомі фундаментальні теореми Амеріо і Фавара [2], що стосуються існування майже-періодичних розв'язків нелінійних та лінійних систем. Пізніше стало зрозумілим, що питання існування таких розв'язків тісно пов'язане з існуванням у таких систем інваріантних торів, для побудови яких зручно застосовувати метод функції Гріна-Самойленка [1, 3, 4].

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

де вектор частот $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \in \mathbf{m}$, $\omega_i > 0$ при всіх натуральних i, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$, $A(\varphi)$ – матриця розмірності $n \times n$ з дійсними елементами, $\mathbf{m}$ – простір обмежених послідовностей дійсних чисел, $\|\omega\| = sup_i\{\omega_i\} = \omega_0 < \infty$, вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $f(\varphi) = (f_1(\varphi), f_2(\varphi), \dots, f_n(\varphi))$ – дійснозначна вектор-функція, причому матриця $A(\varphi)$ та функція $f(\varphi)$ періодичні відносно φ_i $(i = 1, 2, 3, \dots)$ з періодом 2π, що дає змогу вважати їх визначеними на нескінченновимірному торі $\mathcal{T}_\infty$. Підставивши розв'язок першого рівняння системи (1) $\varphi = \omega t + \phi$, $\varphi(0) = \phi \in \mathcal{T}_\infty$ в друге її рівняння, одержимо систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t + \phi)x + f(\omega t + \phi), \tag{2}$$

залежну від $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ як від параметра, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots)$.

Одночасно будемо розглядати укорочену відносно φ до m-го порядку визначену на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$ систему рівнянь виду

$$\frac{d\varphi^{(m)}}{dt} = \omega^{(m)}, \quad \frac{dx^{(m)}}{dt} = A_0(\varphi^{(m)})x^{(m)} + f_0(\varphi^{(m)}),$$

від якої перейдемо до системи рівнянь

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = A_0(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)})x^{(m)} + f(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)}), \tag{3}$$

де

$$\varphi^{(m)} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m), \quad \omega^{(m)} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m),$$
$$\phi^{(m)} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m), \quad A_0(\varphi^{(m)}) = A(\varphi^{(m)}, 0, 0, 0 \dots),$$
$$f_0(\varphi^{(m)}) = f(\varphi^{(m)}, 0, 0, 0 \dots).$$

Задача полягає у відшуканні достатніх умов, при яких система рівнянь (2) має сім'ю майже-періодичних у сенсі Бора [2] розв'язків, залежних від параметра ϕ, кожен з яких можна наблизити із наперед заданою точністю квазіперіодичним у сенсі Боля [4, 5] розв'язком системи рівнянь (3). Аналогічну задачу розглянуто для системи виду (1) при умові, що $x \in \mathbf{m}$, $A(\varphi) = (a_{ij}(\varphi))_{ij=1}^{\infty}$ – нескінченна матриця і $f(\varphi) = \{f_1(\varphi), f_2(\varphi), f_3(\varphi), \dots\}$.

[1] Самойленко А. *Элементы математической теории многочастотных колебаний.* – М.: Наука, 1987. – 302 с.

[2] Демидович Б. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.

[3] Samoilenko A., Teplinskii Yu. *Countable Systems of Differential Equations.* – VSP: Utrecht-Boston, 2003. – 287 p.

[4] Боль П. *Избранные труды.* – Рига: Изд-во АН Латв. ССР, 1961. – 238 с.

[5] Левитан Б. *Почти-периодические функции.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

Микола Філіпчук

Про одну двоточкову крайову задачу для системи диференціальних рівнянь із багатьма перетвореними аргументами

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: filko@ukr.net

Розглядається двоточкова крайова задача для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), ..., x(\lambda_k(t))), \tag{1}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = d, \tag{2}$$

$$\det(A + B) \neq 0, \tag{3}$$

де $t \in [0, T]$, $T = const > 0$; $x, f \in \mathbb{R}^n$; $\lambda_i : [0, T] \to [0, T]$ $(i = \overline{1, k})$ – довільні неперервні відображення; A і B – сталі $n \times n$ матриці; d – сталий n-вимірний вектор.

Для дослідження питання існування та наближеної побудови розв'язку крайової задачі (1)-(3) використаємо модифікацію чисельно-аналітичного методу А.М. Самойленка [1], у якій не виникатиме так зване визначальне рівняння, тобто метод матиме лише аналітичну складову.

Функцію $f(t, x, y_1, \dots, y_k)$ вважаємо визначеною та неперервною в області $(t, x, y_1, \dots, y_k) \in [0, T] \times D^{k+1}$, де D – замкнена обмежена область в $\mathbb{R}^n$, обмеженою вектором $M \in \mathbb{R}^n$, $M_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$, і задовольняючою умову Ліпшіца по $x, y_1, \dots, y_k$ з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0;\ i, j = \overline{1, n}\}$:

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| \leq M,$$

$$|f(t, \overline{x}, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_k}) - f(t, \overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y_1}}, \dots, \overline{\overline{y_k}})| \leq K \left(|\overline{x} - \overline{\overline{x}}| + \sum_{i=1}^{k} |\overline{y_i} - \overline{\overline{y_i}}| \right).$$

Тут $|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| = (|f_1(t, x, y_1, \dots, y_k)|, \dots, |f_n(t, x, y_1, \dots, y_k)|)$ і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1)-(3) дає наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) вектор $w_0 = S^{-1}d$ лежить в області D разом зі своїм $\beta = TCM$-околом, де

$$S = A + B,$$

$$C = \max\{|S^{-1}A|, |S^{-1}B|\}$$

($\max$ береться покомпонентно);

2) найбільше власне значення матриці $Q = (k+1)TCK$ не перевищує одиниці:

$$\lambda_{max}(Q) < 1.$$

Тоді крайова задача (1)-(3) має в області D єдиний розв'язок $x^*(t)$, який є рівномірною границею послідовних наближень

$$x_0(t) = w_0,$$

$$x_m(t) = w_0 + S^{-1}A \int\limits_0^t g_{m-1}(s)ds -$$

$$-S^{-1}B \int\limits_t^T g_{m-1}(s)ds, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

де

$$g_{m-1}(t) \equiv f(t, x_{m-1}(t), x_{m-1}(\lambda_1(t)), \ldots, x_{m-1}(\lambda_k(t))),$$

причому

$$|x^*(t) - x_m(t)| \leq Q^m (E - Q)^{-1} \beta$$

для всіх $m = 1, 2, \ldots$ і $t \in [0, T]$.

Наведену модифіковану схему чисельно-аналітичного методу проілюстровано на модельних прикладах.

Отримані результати доповнюють та завершують дослідження, розпочаті у праці [2].

[1] Самойленко А.М., Ронто Н.И. *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.* – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.

[2] Філіпчук М.П. *Двоточкова крайова задача для системи з багатьма перетвореними аргументами* // Бук. мат. журн. – 2017. – **Т. 5**, № 1-2. – С. 139-143.

Анатолій Хорошун

Про побудову керування, що забезпечує бажану траєкторію руху одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням

[1] *Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна*
E-mail: khoroshunanatoliy@gmail.com

Широко відомо, що однією з причин виникнення вібрацій у маніпуляторах промислових роботів є пружність зчленувань між керуючим приводом і керованою ланкою. Це може бути викликано деформацією елементів трансмісії, таких як ремені передачі чи довгі вали, наприклад, під час швидкого їх руху чи під час великих на них навантажень. Зазвичай, такі малі збурення ігноруються при моделюванні механічних систем, проте цілий ряд експериментів довели, що це може призводити до некоректності моделей, в тому числі до значних порушень у бажаних режимах їх функціонування, див. [1]. Зокрема, можливе виникнення явища резонансу, що призведе до руйнування частин механізму. Адекватними моделями, які враховують вищезазначені зауваження, є механічні моделі, де пружність трансміссії моделюється торсіонними пружинами у кожному із зчленувань, див. [2], [9], [11] та ін. Сила, що виникає внаслідок деформації пружини, зазвичай вважається лінійно залежною від зміщення. Спеціальною заміною змінних математична модель, яка відповідає механічній моделі, що розглядається, може бути зведена до лінійного вигляду, див. [3]. Цей факт дозволяє застосовувати потужний апарат побудови бажаного керування, розроблений для лінійних систем диференціальних рівнянь, а разом із високою адекватністю таких механічних моделей для певних задач це робить їх актуальними і широковживаними. Однак, слід зауважити, що більшої адекватності математична модель набуває, якщо враховувати ефект затухання коливань, а також нелінійний характер згадуваної сили, що стає критичним, коли розглядаються великі навантаження чи інші пограничні режими функціонування механічної моделі. В цьому випадку звести відповідну математичну модель до лінійного вигляду не є можливим і задача побудови керування залишається відкритою. При застосуванні торсіонної пружини для моделювання пружного зчленування, положення керуючого приводу (тобто кут зміщення валу електродвигуна, що здійснює керування) не співпадає із положенням керованої ланки. Зауважимо, що кількість ступенів свободи в такій моделі є більшою ніж кількість входів керування. Цей факт дозволяє віднести її до класу т. зв. "малоприводних"механічних систем (ММС). Системи керування, що відносяться до такого класу, мають кращі енергетичні, масово-габаритні та вартісні показники у порівнянні із звичайними системами керування, де кожному ступеню вільності відповідає вхід керування. ММС широко використовуються для моделювання реальних процесів у таких областях як робототехніка, космонавтика, морська справа, дослідження гнучких, мобільних, локомотивних систем, в багатьох інших (див. [6] та бібліографію там). Одним з методів, що ефективно застосовується для побудови керування, що забезпечує потрібний режим функціонування механічних об'єктів, що описуються нелінійними системами диференціальних рівнянь, є т.зв. Dynamic Surface Control (DSC), див. [8], [10]. Особливістю цього метода є те, що керування, яке побудовано з його допомогою, забезпечує збіжність траєкторій досліджуваної системи диференціальних рівнянь не до бажаних траєкторій, а до деяких наперед заданих, вздовж яких і відбувається прямування траєкторій системи до бажаних. Застосування даної методики до аналізу математичних моделей маніпуляторів із урахуванням пружності трансмісії, які, як було зазначено, відносяться до класу ММС, дозволить значною мірою вирішити труднощі, що пов'язані із нелінійністю сили торсіонної пружини, а також заповнити існуючі пробіли як у загальній теорії ММС, так і в теорії моделювання маніпуляторів. Маловивченим є питання робастності побудованого керування, тобто малої зміни траєкторій руху системи при малій зміні її параметрів і, також, побудова областей такої робастності у просторі параметрів. Слід зазначити, що питання наявності неточних параметрів у реальних механічних системах є природнім, див. [4], [5], [7], якщо врахувати, що параметри визначаються, зазвичай, шляхом обрахунків або з дослідів, а отже наближено, і тому теоретичні побудови, що потребують точних значень параметрів, взагалі кажучи, є марними. Таким чином, з вищезазначеного слідує, що розробка нових та вдосконалення існуючих моделей маніпуляторів та режимів їх керування з урахуванням пружності зчленувань та наявності неточних значень параметрів в контексті розвитку теорії ММС є, без сумніву, актуальною задачею сучасної теоретичної механіки і має важливе прикладне значення.

В роботі отримано закон обертання електродвигуна, який забезпечує рух одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням по заданій траєкторії. Пружність зчленування моделюється торсіонною пружиною, сила пружності якої вважається нелінійно залежною від зміщення. Застосування техніки DSC у поєднанні із методом функції Ляпунова дозволяє отримати бажане керування і довести, що воно забезпечує виконання поставленої задачі. Отримані оцінки на параметри керування, доведена його робастність та визначена область робастності у просторі параметрів системи.

Робота виконана за рахунок коштів бюджетної програми НАН України (КПКВК 6541230)

[1] Good M. C., Sweet L. M., Strobel K. L. *Dynamic models for control system design of integrated robot and drive systems* // ASME J. Dynam. Syst., Meas., Contr. – 1985. – 107 –pp.53-59.

[2] De Luca A. *Dynamic Control of Robots with Joint Elasticity* // Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, PA, USA. – 1988. – pp.152-158.

[3] Doelman R.B. *Feedback linearization control of a single link manipulator with joint elasticity* // DCT rapporten. – Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 1991. – p.47.

[4] Ikeda M., Ohta Y., Siljak D.D. *Parametric stability* // Proceedings of the Univesita di Genova – Ohio State University Joint Conference. – Boston, MA, USA. – 1991. – pp.1-20.

[5] Khoroshun A.S. *Stabilization of the Upper Equilibrium Position of a Pendulum by Spinning an Inertial Flywheel* // Int.Appl.Mech. – 2016. – **52**, iss.5. – pp.547-556.

[6] Liu Y., Yu H. *A survey of underactuated mechanical systems* // IET Control Theory Appl. – 2013. – **7**, iss.7. – pp.921-935.

[7] Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Yu.A. *Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control.* – Boca Raton, London, New York: CRC Press Taylor and Francis Group, 2012. – p.296.

[8] Song B., Hedrick J.K. *Dynamic surface control of uncertain nonlinear systems. An LMI approach.* – London: Springer-Verlag, 2011. – p.268.

[9] Spong M. W. *Control of Flexible Joint Robots: A Survey* // Coordinated Science Laboratory Report no. UILU-ENG-90-2203. – Urbana-Champaign: University of Illinois, 1990. – p.29.

[10] Swaroop D., Hedrick J.K., Yip P.P., Gerdes J.C. *Dynamic surface control for a class of nonlinear systems* // IEEE Trans. of Automatic Control. – 2000. – **45**, №11. – pp.1893-1899.

[11] Tomei P. *A Simple PD Controller for Robots with Elastic Joints* // IEEE Trans. of Automatic Control. – 1991. – **36**, №10. – pp.1208-1213.

Ольга Чепок

Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями суттєво різних типів

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: olachepok@ukr.net

Розглядається диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1; 1\}, p\colon [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$,
$\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i \in \{0, 1\})$ — неперервні функції, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — однобічний окіл Y_i.

Вважаємо також, що функція φ_1 є правильно змінною (див. [1], розділ 1.4, стор. 17) при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$ порядку σ_1, а функція φ_0 двічі неперервно диференційовна на Δ_{Y_0} та така, що

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(z)\varphi_0''(z)}{\big(\varphi_0'(z)\big)^2} = 1. \tag{2}$$

Диференціальне рівняння (1) досліджується щодо умов існування у нього $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків, а також асимптотичних зображень таких розвязків та їх похідних першого порядку. Основні результати, присвячені темі дослідження, викладені у [2], наразі уточнена кількість таких розв'язків.

Розв'язок y рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язком, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[$ і задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = 0.$$

Основні результати доводяться у припущенні існування для $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$–розв'язків скінченної чи нескінченної границі $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$. За апріорними властивостями таких розв'язків маємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = -1, \tag{3}$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Отже, кожен з $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків рівняння (1) є нормалізованою повільно змінною функцією при $t \uparrow \omega$.

З (3) випливає, що функція $y'(t)$ є нормалізованною правильно змінною функцією порядку (-1) при $t\uparrow\omega$, тобто, може бути подана у вигляді

$$y'(t) = |\pi_\omega(t)|^{-1}L_1(t),$$

де $L_1(t) : [t_0,\omega[\to]-\infty,+\infty[$ — нормалізована повільно змінна при $t\uparrow\omega$ функція.

При доведенні існування $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків рівняння (1) було отримано, що у випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)I_2'(t)}{I_2(t)} = c\in R$, при $c(1-\sigma_1)>0$ рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків, при $c(1-\sigma_1)<0$ та $\beta(1-\sigma_1)<0$ рівняння (1) має двопараметричну сім'ю таких розв'язків, при $c(1-\sigma_1)<0$ та $\beta(1-\sigma_1)>0$ — має принаймні один такий розв'язок, де при $t\in[b;\omega[\subset[t_0,\omega[$

$$I_2(t) = \operatorname{sign}(y_1^0)\cdot\int\limits_{B_\omega^2}^{t}\left|\pi_\omega(\tau)p(\tau)\theta_1\left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(\tau)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}d\tau.$$

У випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_2'(t)}{I_2(t)} = \pm\infty$, рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків.

[1] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L., *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*, Cambridge university press,Cambridge, 1987.

[2] Чепок О. О. *Асимптотичні зображення повільно змінних розв'язків двочленних диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями різних типів* // Буковинський математичний журнал. – 2016. – **4**, №3-4. – С. 190-196.

Ірина Чепурухіна

Про еліптичні за Лавруком задачі з нерегулярними крайовими даними

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
chepurukhina@gmail.com

Доповідь присвячена еліптичним крайовим задачам з додатковими невідомими функціями у крайових умовах. Такі задачі уперше розглянув Б. Лаврук у 1963 р. Розглядається випадок, коли їх праві частини є довільними, взагалі кажучи, нерегулярними розподілами. Властивості таких задач досліджуються у шкалі узагальнених просторів Соболєва $H^{s,\varphi}$, основна регулярність яких задається числом $s \in \mathbb{R}$, а додаткова — функцією $\varphi \in \mathcal{M}$. Клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, які обмежені й відокремлені від нуля на кожному компакті та повільно змінюються на ∞, тобто $\varphi(\lambda t)/\varphi(t) \to 1$ при $t \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$. Гільбертів простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\langle\xi\rangle^s\varphi(\langle\xi\rangle)\mathcal{F}w(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)$, і наділений відповідною нормою. Тут $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, а $\mathcal{F}w$ — перетворення Фур'є розподілу w. Для обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з межею $\Gamma \in C^\infty$ гільбертові простори $H^{s,\varphi}(\Omega)$ і $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ означаються стандартно за простором $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. У випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$ вони стають просторами Соболєва порядку s.

Нехай задано цілі числа $q \geq 1$, $\varkappa \geq 1$, $m_1, \ldots, m_{q+\varkappa} \leq 2q - 1$ та $r_1, \ldots, r_\varkappa$. Розглянемо крайову задачу вигляду

$$Au = f \text{ в } \Omega, \quad B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \text{ на } \Gamma, \;\; j = 1, ..., q + \varkappa. \tag{1}$$

Тут A та кожне B_j і $C_{j,k}$ є лінійними диференціальні операторами з комплексними коефіцієнтами класів $C^\infty(\overline{\Omega})$ (для A) та $C^\infty(\Gamma)$. Припускаємо, що $\operatorname{ord} A = 2q$, $\operatorname{ord} B_j \leq m_j$ і $\operatorname{ord} C_{j,k} \leq m_j + r_k$. Розподіли u в Ω і $v_1, \ldots, v_\varkappa$ на Γ є шуканими в (1). Припускаємо, що $f \in L_2(\Omega)$, а кожне $g_j \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, тобто g_j — довільний розподіл на Γ.

Нехай $\mathcal{S}'_A(\Omega)$ складається з усіх розподілів $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$ (продовжуваних в $\mathbb{R}^n$) таких, що $Au \in L_2(\Omega)$. Нехай також $H^{s,\varphi}_A(\Omega) := H^{s,\varphi}(\Omega) \cap \mathcal{S}'_A(\Omega)$ — підпростір в $H^{s,\varphi}(\Omega)$.

Теорема 1. *Нехай $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Відображення $(u, v) := (u, v_1, ..., v_\varkappa) \to (f, g_1, ..., g_{q+\varkappa}) =: (f, g)$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $v_1, \ldots, v_\varkappa \in C^\infty(\Gamma)$, а функції f і g_1,...,$g_{q+\varkappa}$ означені за формулами* (1), *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$\Lambda : H^{s,\varphi}_A(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) \to L_2(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma). \tag{2}$$

Цей оператор нетерів. Його скінченновимірне ядро лежить у $C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^\varkappa$ та разом зі скінченним індексом не залежить від s і φ.

Вектор $(u, v) \in \mathcal{S}'_A(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^\varkappa$ називаємо узагальненим розв'язком задачі (1), де $(f, g) \in L_2(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^{q+\varkappa}$, якщо $\Lambda(u, v) = (f, g)$ для оператора (2) при деяких $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Розглянемо локальні (аж до частини межі Γ) властивості цього розв'язку.

Нехай відкрита множина $U \subset \mathbb{R}^n$ така, що $\Omega_0 := \Omega \cap U \neq \varnothing$ і $\Gamma_0 := \Gamma \cap U \neq \varnothing$. Простір $H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ складається з усіх $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$ таких, що $\chi u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, носій якої $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Простір $H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ складається з усіх $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $\chi h \in H^{s,\varphi}(\Gamma)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\Gamma)$ з $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$.

Теорема 2. *Нехай $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Припустимо, що вектор $(u, v) \in \mathcal{S}'_A(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^{\varkappa}$ є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1), *де $f \in L_2(\Omega)$ і кожне $g_j \in H^{s-m_j-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$. Тоді $u \in H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ і кожне $v_k \in H^{s+r_k-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$.*

Позначимо через $\|\cdot\|'_{s,\varphi}$ і $\|\cdot\|''_{0,s,\varphi}$ норми у гільбертових просторах, на парі яких діє оператор (2).

Теорема 3. *Припустимо, що вектор (u, v) задовольняє умови теореми* 2 *для деяких $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Нехай задано число $\lambda > 0$ і функції $\chi, \eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ такі, що $\operatorname{supp}\chi \subset \operatorname{supp}\eta \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Тоді*

$$\|\chi(u, v)\|'_{s,\varphi} \leq c\left(\|\eta(f, g)\|''_{0,s,\varphi} + \|\eta(u, v)\|'_{s-\lambda,\varphi}\right)$$

для деякого числа $c > 0$, не залежного від u, v, f і g.

Ці результати отримані спільно з О. О. Мурачем [1].

[1] Chepurukhina I., Murach A. *Elliptic problems with unknowns on the boundary and irregular boundary data* // Methods Funct. Anal. Topology. – 2020. – **26**, no. 2. – P. 91–102.

ЗМІСТ

Наукове видання

Міжнародна наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Чернівці, 16–19 вересня 2020 року

Матеріали конференції